【数列の表記】

1 一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 4 項までを求めよ。

(1) $a_n=2n-1$

$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=5,\ a_4=7$

(2) $a_n=n(n+1)$

$a_1=2,\ a_2=6,\ a_3=12,\ a_4=20$

(3) $a_n=2^n$

$a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=8,\ a_4=16$

【等差数列の一般項】

2 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 10 項を求めよ。

(1) 初項 5，公差 4

$a_n=5+(n-1)\cdot 4$
$=4n+1$

$a_{10}=40+1$
$=41$

(2) 初項 10，公差 -5

$a_n=10+(n-1)(-5)$
$=-5n+15$

$a_{10}=-50+15$
$=-35$

3 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 2，6，10，14，……

4 4 4

$a=2,\ d=4$

$a_n=2+(n-1)\cdot 4$
$=4n-2$

(2) 100，95，90，85，……

-5 -5 -5

$a=100,\ d=-5$

$a_n=100+(n-1)(-5)$
$=-5n+105$

4 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 第 4 項が15，第 8 項が 27

$\boxed{a_4=15}$ $\boxed{a_8=27}$

$a_4=a+3d=15$ —①
$a_8=a+7d=27$ —②

②−①
$4d=12$
$d=3$

①に代入
$a+9=15$
$a=6$

よって
$a_n=6+(n-1)\cdot 3$
$=3n+3$

(2) 第 5 項が 20，第 10 項が 0

$\boxed{a_5=20}$ $\boxed{a_{10}=0}$

$a_5=a+4d=20$ —①
$a_{10}=a+9d=0$ —②

②−①
$5d=-20$
$d=-4$

②に代入
$a=36$

よって
$a_n=36+(n-1)(-4)$
$=-4n+40$

5 第 5 項が 3，第 10 項が 18 である等差数列 $\{a_n\}$ において，

(1) 初項と公差を求めよ。

$a_5=a+4d=3$ —①
$a_{10}=a+9d=18$ —②

②−①
$5d=15$
$d=3$

①代入
$a+12=3$
$a=-9$

(2) 第 21 項を求めよ。

(1)より

$a_n=-9+(n-1)\cdot 3$
$=3n-12$

よって
$a_{21}=63-12$
$=51$

(3) 初めて 1000 を超えるのは，第何項か。

$a_n=3n-12>1000$
$3n>1012$
$n>337.3\cdots$

よって 第 338 項

$3\overline{)1012}$ = 337 …… 1

【等差数列をなす 3 数】

6 次の数列が等差数列であるとき，x の値を求めよ。

(1) 3，x，7，……

$x-3=7-x$
$2x=10$
$x=5$

(2) $\dfrac{1}{12}$，$\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{1}{6}$，……

$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{x}$
$12-x=2x-12$
$3x=24$
$x=8$

7 等差数列をなす 3 つの数があって，それらの和が 9，積が 15 であるという。この 3 つの数を求めよ。

3数を $a-d,\ a,\ a+d$ とおく。

和が9より
$(a-d)+a+(a+d)=9$
$3a=9$
$a=3$

積が15より
$(3-d)3(3+d)=15$
$9-d^2=5$
$d^2=4$
$d=\pm 2$

$d=2$ のとき 1, 3, 5
$d=-2$ のとき 5, 3, 1

よって 1, 3, 5

【等差数列の和】

8 次の和を求めよ。

(1) 初項 10，公差 −4 の等差数列の初項から第 15 項までの和 S_{15} を求めよ。

$S_{15}=\frac{15}{2}\{2\cdot10+(15-1)\cdot(-4)\}$

$=\frac{15}{2}\{20-56\}$

$=270$

(2) 初項 2，末項 10，項数 9 の等差数列の和 S_9 を求めよ。

$S_9=\frac{9}{2}(2+10)$

$=54$

(3) 初項 1，公差 2 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$S_n=\frac{n}{2}\{2\cdot1+(n-1)\cdot2\}$

$=\frac{n}{2}\{2+2n-2\}$

$=n^2$

9 次の等差数列の和 S を求めよ。

(1) $\underbrace{2,\ 6}_{4},\ \underbrace{6,\ 10}_{4}$, ……, 74

$a_n=2+(n-1)d$

$=4n-2$

$4n-2=74$

$4n=76$

$n=19$

よって.

$S_{19}=\frac{19}{2}\{2+74\}$

$=19\cdot38$

$=722$

(2) 102, 96, 90, ……, 6

-6 -6

$a_n=102+(n-1)\cdot(-6)$

$=-6n+108$

$-6n+108=6$

$6n=102$

$n=17$

よって.

$S_{17}=\frac{17}{2}\{102+6\}$

$=17\cdot54$

$=918$

【等差数列の和から初項と公差を求める】

10 初項が 50，末項が 10，和が 330 である等差数列の項数 n と公差 d を求めよ。

$\frac{n}{2}(50+10)=330$

$30n=330$

$n=11$

50, ……, 10

項数 11

$a_{11}=10$

$50+(11-1)d=10$

$10d=-40$

$d=-4$

11 等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。初項から第 10 項までの和が 100 で，初項から第 20 項までの和が 400 であるとき，S_n を求めよ。

$\boxed{S_{10}=100}$ $\boxed{S_{20}=400}$

$S_{10}=\frac{10}{2}\{2a+9d\}=100$

$2a+9d=20$ —①

$S_{20}=\frac{20}{2}\{2a+19d\}=400$

$2a+19d=40$ —②

②−①

$10d=20$

$d=2$

①に代入

$2a+18=20$

$2a=2$

$a=1$

よって

$S_n=\frac{n}{2}\{2+(n-1)2\}$

$=\frac{n}{2}\{2n\}$

$=n^2$

【倍数の和】

12 1 から 100 までの整数について，次のような数の和を求めよ。

(1) 6 の倍数

6, 12, 18, ……, 96

$a=6$, $d=6$, $n=16$ の等差数列

$100\div6=16$ … 4 (6)100 → 16, 6, 40, 36, 4)

$S_n=\frac{16}{2}\{12+15\cdot6\}$

$=8\cdot102$

$=816$

(2) 6 の倍数ではない数

$\boxed{\text{すべて}-6\text{の倍数}}$

すべて

1, 2, 3, … 100

$a=1$, $d=1$, $n=100$ の等差数列

$S_{100}=\frac{100}{2}\{2+99\}$

$=5050$

よって.

$5050-816=4234$

【等差数列の和の最大値】

13 初項が 77，公差が −3 である数列 $\{a_n\}$ がある。

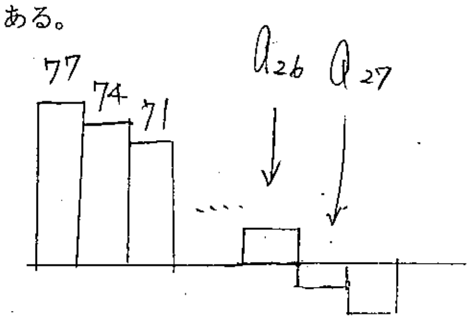
(1) 第何項が初めて負の数になるか。

$a_n=77+(n-1)(-3)$

$=-3n+80<0$

$3n>80$

$n>26.6$



よって. 第 27 項

(2) 初項から第何項までの和が最大であるか。また，その和を求めよ。

(1) より 初項から第 26 項

$S_{26}=\frac{26}{2}\{154+25(-3)\}$

$=13\cdot79$

$=1027$

数列③

【等比数列の表記】

14 次のような等比数列の初項から第4項までを書け。

(1) 初項1，公比3

$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=9,\ a_4=27$

(2) 初項 $-\frac{1}{2}$，公比 $-\frac{1}{2}$

$a_1=-\frac{1}{2},\ a_2=\frac{1}{4},\ a_3=-\frac{1}{8},\ a_4=\frac{1}{16}$

【等比数列の一般項】

15 次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第5項を求めよ。

(1) 初項2，公比3

$a_n=2\cdot 3^{n-1}$

$a_5=2\cdot 3^4=162$

(2) 初項1，公比 -3

$a_n=(-3)^{n-1}$

$a_5=(-3)^4=81$

(3) 初項2，公比2

$a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

$a_5=2^5=32$

(4) 初項 -3，公比 $\frac{1}{2}$

$a_n=-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_5=-3\left(\frac{1}{2}\right)^4=-\frac{3}{16}$

16 次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $\frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{3}{16},\ \cdots\cdots$

$a=\frac{3}{2},\ r=\frac{1}{2}$

$a_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(2) $5,\ -5,\ 5,\ -5,\ \cdots\cdots$

$a=5,\ r=-1$

$a_n=5\cdot(-1)^{n-1}$

(3) $\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2},\ 4+3\sqrt{2},\ \cdots\cdots$

$\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$

$a=\sqrt{2},\ r=\sqrt{2}+1$

$a_n=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^{n-1}$

17 次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 第2項が6，第4項が54

$\boxed{a_2=6}$ $\boxed{a_4=54}$

$a_2=ar=6$ —①

$a_4=ar^3=54$

$ar\cdot r^2=54$ —②

$6r^2=54$

$r^2=9$

$r=\pm 3$

①に代入

$r=3$ のとき

$3a=6$

$a=2$

$r=-3$ のとき

$-3a=6$

$a=-2$

$r=3$ のとき ①に代入

$3a=6$

$a=2$

よって.

$a_n=2\cdot 3^{n-1}$

$a_n=(-2)\cdot(-3)^{n-1}$

(2) 第5項が -9，第7項が -27

$\boxed{a_5=-9}$ $\boxed{a_7=-27}$

$a_5=ar^4=-9$ —①

$a_7=ar^6=-27$

$ar^4r^2=-27$ —②

①を②に代入

$-9r^2=-27$

$r^2=3$

$r=\pm\sqrt{3}$

①に代入

$r=\sqrt{3}$ のとき

$9a=-9$

$a=-1$

$r=-\sqrt{3}$ のとき

$9a=-9$

$a=-1$

よって.

$a_n=-(\sqrt{3})^{n-1}$

$a_n=-(-\sqrt{3})^{n-1}$

【等比数列をなす3数】

18 次の数列は等比数列である。x，y の値を求めよ。

(1) $3,\ x,\ 9,\ \cdots\cdots$

$\frac{x}{3}=\frac{9}{x}$

$x^2=27$ $\quad x=\pm 3\sqrt{3}$

(2) $x,\ -5,\ x,\ y,\ \cdots\cdots$

① ②

①より

$\frac{-5}{x}=\frac{x}{-5}$

$x^2=25$

$x=\pm 5$

②より

$\frac{x}{-5}=\frac{y}{x}$

$x^2=-5y$

$y=-\frac{x^2}{5}$

$x=5$ のとき $y=-5$

$x=-5$ のとき $y=-5$

19 数列24，a，b がこの順に等差数列をなし，数列 a，b，8 がこの順に等比数列をなすという。このとき，a，b の値を求めよ。

等差数列より

$a-24=b-a$

$2a-b=24$ —①

等比数列より

$\frac{b}{a}=\frac{8}{b}$

$b^2=8a$

$a=\frac{1}{8}b^2$ —②

②を①に代入

$2\left(\frac{1}{8}b^2\right)-b=24$

$\frac{1}{4}b^2-b-24=0$

$b^2-4b-96=0$

$(b+8)(b-12)=0$

$b=-8,\ 12$

①に代入

$b=-8$ のとき $a=8$

$b=12$ のとき $a=18$

【等比数列の和】

20 次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) $\underbrace{2,\ 6}_{3},\ \underbrace{6,\ 18}_{3},\ 54,\ \cdots\cdots$

$S_n = \dfrac{2(3^n-1)}{3-1} = \underline{3^n-1}$

(2) $\underbrace{3,\ -6}_{-2},\ \underbrace{-6,\ 12}_{-2},\ -24,\ \cdots\cdots$

$S_n = \dfrac{3\{1-(-2)^n\}}{1+2} = \underline{1-(-2)^n}$

(3) $\underbrace{12,\ 4}_{\frac{1}{3}},\ \underbrace{4,\ \frac{4}{3}}_{\frac{1}{3}},\ \frac{4}{9},\ \cdots\cdots$

$S_n = \dfrac{12\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{12\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{\frac{2}{3}} = \underline{18\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}$

(4) $\underbrace{2,\ 2x}_{x},\ \underbrace{2x,\ 2x^2}_{x},\ 2x^3,\ \cdots\cdots$

$x \neq 1$ のとき

$S_n = \underline{\dfrac{2(x^n-1)}{x-1}}$

$x=1$ のとき

$\underbrace{2,\ 2,\ 2,\ 2\ \cdots}_{n\text{コ}}$

$\underline{S_n = 2n}$

21 初項が 5，公比が 2 である等比数列において，第 5 項から第 10 項までの和を求めよ。

$S_n = \dfrac{5(2^n-1)}{2-1}$

$= 5(2^n-1)$

$\boxed{S_{10}-S_4}$

$S_4 = 5(2^4-1)$

$= 75$

$S_{10} = 5(2^{10}-1)$

$= 5115$

よって

$S_{10}-S_4 = 5115-75$

$= \underline{5040}$

【等比数列の和から初項と公差を求める】

22 初項から第 3 項までの和が 7，第 3 項から第 5 項までの和が 28 となる等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

$\underbrace{a\quad ar\quad ar^2}_{7}$

$\underbrace{ar^2\quad ar^3\quad ar^4}_{28}$

$\begin{cases} a+ar+ar^2 = 7 & \text{—①} \\ ar^2+ar^3+ar^4 = 28 & \text{—②} \end{cases}$

$r^2(a+ar+ar^2) = 28$ —②′

②′に①を代入

$7r^2 = 28$

$r^2 = 4$

$r = \pm 2$

①に代入

$r=2$ のとき

$7a = 7$

$a = 1$

$r=-2$ のとき

$3a = 7$

$a = \dfrac{7}{3}$

よって

$r=2$ のとき $a=1$

$\underline{r=-2 \text{ のとき } a=\frac{7}{3}}$

【Σ の計算】

23 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 5^{k-1} = 5^0+5^1+5^2+\cdots+5^{n-1}$

初 1　公比 5　項数 n　の等比数列の和

$= \dfrac{1(5^n-1)}{5-1} = \underline{\dfrac{1}{4}(5^n-1)}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 3^1+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}$

初 3　公比 3　項数 $n-1$ の等比数列の和

$= \dfrac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} = \underline{\dfrac{3}{2}(3^{n-1}-1)}$

24 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-5) = 4\sum_{k=1}^{n} k - 5\sum_{k=1}^{n}$

$= 4\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)-5n$

$= 2n(n+1)-5n$

$= \underline{n(2n-3)}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+2) = \sum_{k=1}^{n}k^2 - 3\sum_{k=1}^{n}k + 2\sum_{k=1}^{n}$

$= \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\dfrac{3}{2}n(n+1)+2n$

$= \dfrac{1}{6}\{n(n+1)(2n+1)-9n(n+1)+12n\}$

$= \dfrac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-9(n+1)+12\}$

$= \dfrac{1}{6}n\{2n^2+3n+1-9n-9+12\}$

$= \dfrac{1}{6}n(2n^2-6n+4)$

$= \dfrac{1}{3}n(n^2-3n+2) = \underline{\dfrac{1}{3}n(n-1)(n-2)}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k^2+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^3+k) = \sum_{k=1}^{n}k^3 + \sum_{k=1}^{n}k$

$= \dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2+\dfrac{1}{2}n(n+1)$

$= \dfrac{1}{4}\{n^2(n+1)^2+2n(n+1)\}$

$= \dfrac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)+2\}$

$= \underline{\dfrac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+2)}$

(4) $\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1}$

$= 2\cdot\frac{1}{2}n(n-1) + (n-1)$

$= n(n-1) + (n-1)$

$= (n-1)(n+1)$ //

(5) $\sum_{k=1}^{2n}(2k+3) = 2\sum_{k=1}^{2n} k + 3\sum_{k=1}^{2n}$

$= 2\cdot\frac{1}{2}2n(2n+1) + 3\cdot 2n$

$= 2n(2n+1) + 6n$

$= 2n\{(2n+1)+3\}$

$= 2n(2n+4)$

$= 4n(n+2)$ //

25 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{15}2 = 2\sum_{k=1}^{15}$

$= 2\cdot 15$

$= 30$ //

(2) $\sum_{k=1}^{20}k = \frac{1}{2}20\cdot 21$

$= 10\cdot 21$

$= 210$ //

(3) $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+12^2 = \sum_{k=1}^{12}k^2$

$= \frac{1}{6}\cdot 12\cdot 13\cdot 25$

$= 650$ //

26 次の和を求めよ。

$1\cdot1+2\cdot7+3\cdot13+\cdots\cdots+n(6n-5)$

$\sum_{k=1}^{n}k(6k-5) = \sum_{k=1}^{n}(6k^2-5k)$

$= 6\sum_{k=1}^{n}k^2 - 5\sum_{k=1}^{n}k$

$= 6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 5\frac{1}{2}n(n+1)$

$= n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{2}\{2n(n+1)(2n+1) - 5n(n+1)\}$

$= \frac{1}{2}n(n+1)\{2(2n+1)-5\}$

$= \frac{1}{2}n(n+1)(4n-3)$ //

27 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$1\cdot3,\ 2\cdot5,\ 3\cdot7,\ 4\cdot9,\ \cdots\cdots$ $n\cdot(2n+1)$

左 1, 2, 3, 4 …　　右 3, 5, 7, 9 …

第n項 $= n$　　初 3 公差 2 の等差数列

第n項 $= 3+(n-1)\cdot2$

$= 2n+1$

よって

$\sum_{k=1}^{n}k(2k+1) = \sum_{k=1}^{n}(2k^2+k)$

$= 2\sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k$

$= 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)+3\}$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$ //

28 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$\underbrace{2}_{①},\ \underbrace{2+5}_{②},\ \underbrace{2+5+8}_{③},\ \underbrace{2+5+8+11}_{④},\ \cdots\cdots$　　$\underbrace{2+5+8+11\cdots}_{ⓝ}$

$2+5+8+11\cdots$

初 2 公差 3 項数 n の等差数列の和

第n項 $= \frac{n}{2}\{2\cdot2+(n-1)\cdot3\}$

$= \frac{n}{2}(3n+1)$

よって

$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2}(3k+1) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}k^2+\frac{k}{2}\right)$

$= \frac{3}{2}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}\frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{4}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{4}n(n+1)$

$= \frac{1}{4}n(n+1)\{2n+1+1\}$

$= \frac{1}{4}n(n+1)(2n+2)$

$= \frac{1}{2}n(n+1)(n+1)$

$= \frac{1}{2}n(n+1)^2$ //

【階差数列】

29 階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ \cdots\cdots$ $\{a_n\}$

$\quad 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \cdots$ $\{b_n\}$

$\{b_n\}$ は初 1 公差 1 の等差数列

$b_n = n$

$n \geqq 2$ のとき

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k$

$= 1 + \frac{1}{2}n(n-1)$

$= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$

$n=1$ のとき

$a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1$

$= 1$

よって

$a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$

(2) $2,\ 3,\ 5,\ 9,\ 17,\ \cdots\cdots$ $\{a_n\}$

$\quad 1\ \ 2\ \ 4\ \ 8\ \cdots$ $\{b_n\}$

$\{b_n\}$ は初 1 公比 2 の等比数列

$b_n = 2^{n-1}$

$n \geqq 2$ のとき

$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}$

$= 2 + \boxed{2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}}$

初 1 公比 2 項数 $n-1$ の等比数列の和

$= 2 + \frac{1(2^{n-1}-1)}{2-1}$

$= 2 + 2^{n-1} - 1$

$= 2^{n-1} + 1$

$n=1$ のとき

$a_1 = 2^0 + 1$

$= 2$

よって $a_n = 2^{n-1} + 1$

【和 S_n と一般項 a_n】

30 初項から第 n 項までの和 S_n が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $S_n = n^2 - n$

$n \geqq 2$ のとき

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n^2 - n - \{(n-1)^2 - (n-1)\}$

$= n^2 - n - (n^2 - 2n + 1 - n + 1)$

$= n^2 - n - (n^2 - 3n + 2)$

$= 2n - 2$ — ①

$n=1$ のとき

$a_1 = S_1 = 1 - 1 = 0$

(① を満たす)

よって

$a_n = 2n - 2$

(2) $S_n = n^2 - n + 2$

$n \geqq 2$ のとき

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n^2 - n + 2 - \{(n-1)^2 - (n-1) + 2\}$

$= n^2 - n + 2 - \{n^2 - 2n + 1 - n + 1 + 2\}$

$= n^2 - n + 2 - (n^2 - 3n + 4)$

$= 2n - 2$ — ①

$n=1$ のとき

$a_1 = S_1 = 1 - 1 + 2 = 2$

(① を満たさない)

よって

$a_n = \begin{cases} 2n-2 & (n \geqq 2) \\ 2 & (n=1) \end{cases}$

【部分分数分解】

31 次の和を求めよ。

$$S = \frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \cdots\cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$S = \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{2n+1}{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}$

【(等差)×(等比)型】

32 次の和を求めよ。

$$S = 1\cdot1 + 2\cdot2 + 3\cdot2^2 + \cdots\cdots + n\cdot2^{n-1}$$

$S = 1\cdot1 + 2\cdot2 + 3\cdot2^2 + \cdots + n\cdot2^{n-1}$

$-\ 2S = \quad 1\cdot2 + 2\cdot2^2 + \cdots + (n-1)2^{n-1} + n\cdot2^n$

$-S = \boxed{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}} - n\cdot2^n$

初 1 公比 2 項数 n の等比数列の和

$-S = \frac{2^n - 1}{2-1} - n\cdot2^n$

$-S = 2^n - 1 - n\cdot2^n$

$S = n\cdot2^n - 2^n + 1$

$= (n-1)2^n + 1$

【群数列】

33 正の奇数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には n 個の数が入るものとする。

① ② ③ ④ (n)

$1\ |\ 3,\ 5\ |\ 7,\ 9,\ 11\ |\ 13,\ 15,\ 17,\ 19\ |\ 21,\ \cdots\cdots$

第1群 第2群 第3群 第4群

$|2N-1|$

第 n 群

何番目か.

(1) $n \geqq 2$ のとき，第 n 群の最初の数 n の式で表せ。

① + ② + ③ + ④ + $\cdots$ + ($n-1$)

初 1 公差 1 項数 $n-1$ の等差数列

$S_n = \frac{n-1}{2}\{1 + n - 1\}$

$= \frac{1}{2}n(n-1)$

よって

$\left(\frac{1}{2}n(n-1) + 1\right)$ 番目

従って

$2\left(\frac{1}{2}n(n-1) + 1\right) - 1$

$= n(n-1) + 2 - 1$

$= n^2 - n + 1$

(2) 第 15 群に入るすべての数の和 S を求めよ。

$15^2 - 15 + 1 = 211$

$|\ 211,\ 213,\ \cdots\ |$

第 15 群

初 211 公差 2 項数 15 の等差数列

$S_{15} = \frac{15}{2}\{211 \cdot 2 + (15-1)\cdot2\}$

$= \frac{15}{2}\cdot450$

$= 15\cdot225 = 3375$

【漸化式】

34 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+3$

初 2　公差 3 の 等差数列

$a_n = 2 + (n-1)\cdot 3$

$= 3n-1$

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n$

初 1　公比 2 の 等比数列

$a_n = 2^{n-1}$

35 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3^n$

$n \geqq 2$ のとき

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k$

$= \boxed{1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1}}$

初 1　公比 3　項数 n の等比数列の和

$= \dfrac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}$

$= \dfrac{3^n-1}{2}$

$n=1$ のとき

$a_1 = \dfrac{3-1}{2}$

$= 1$

よって　$a_n = \dfrac{3^n-1}{2}$

(2) $a_1=0,\ a_{n+1}=a_n+2n+1$

$n \geqq 2$ のとき

$a_n = 0 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$

$= 2\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1}$

$= n(n-1) + (n-1)$

$= (n-1)(n+1)$

$n=1$ のとき

$a_1 = (1-1)(1+1)$

$= 0$

よって

$a_n = (n-1)(n+1)$

36 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=5,\ a_{n+1}=4a_n-6$

$x = 4x-6$

$3x = 6$

$x = 2$

$-\ \ 2 = 4\cdot 2 - 6$

$a_{n+1} - 2 = 4(a_n - 2)$

$b_n = a_n - 2$ とおく

$b_{n+1} = 4b_n$

初 $b_1 = a_1 - 2 = 5 - 2 = 3$ の等比数列

公比 4

$b_n = 3\cdot 4^{n-1}$

$a_n - 2 = 3\cdot 4^{n-1}$

$a_n = 3\cdot 4^{n-1} + 2$

(2) $a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$

$x = \frac{1}{2}x + 1$

$\frac{1}{2}x = 1$

$x = 2$

$-\ \ 2 = \frac{1}{2}\cdot 2 + 1$

$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

$b_n = a_n - 2$ とおくと

$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$

初 $b_1 = a_1 - 2 = 3 - 2 = 1$ の等比数列

公比 $\frac{1}{2}$

$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n - 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$

【3 項間漸化式】

37 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}-7a_{n+1}+10a_n=0$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x-5)(x-2) = 0$

$x = 2, 5$

$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 5(a_{n+1} - 2a_n)$

初 $a_2 - 2a_1 = 1 - 0 = 1$ の等比数列

公比 5

$a_{n+1} - 2a_n = 5^{n-1}$ — ①

$a_{n+2} - 5a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 5a_n)$

初 $a_2 - 5a_1 = 1 - 0 = 1$ の等比数列

公比 2

$a_{n+1} - 5a_n = 2^{n-1}$ — ②

① − ②

$3a_n = 5^{n-1} - 2^{n-1}$

$a_n = \dfrac{5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}$

【数学的帰納法】

38 数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ。

(1) $1+3+5+\cdots\cdots+(2n+1)=n^2$ —— ①

[1] $n=1$ のとき

(左辺) $= 2-1=1$

(右辺) $= 1^2=1$

よって．$n=1$ のとき ①は成り立つ

[2] $n=k$ のとき

$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

が成り立つと仮定する

$n=k+1$ のとき

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\{2(k+1)-1\}=(k+1)^2$

を示す．

(左辺) $= k^2+\{2(k+1)-1\}$

$= k^2+2k+1$

$= (k+1)^2$

$=$ (右辺)

よって．$n=k+1$ のとき ①は成り立つ．

[1][2] より ①は成り立つ

(2) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ —— ①

[1] $n=1$ のとき

(左辺) $= 1(1+1)=2$

(右辺) $= \frac{1}{3}1(1+1)(1+2)=2$

よって．$n=1$ のとき ①は成り立つ

[2] $n=k$ のとき

$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$

が成り立つと仮定する

$n=k+1$ のとき

$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$

$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$ を示す

(左辺) $= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$

$= \frac{1}{3}\{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)\}$

$= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)\{k+3\}$

よって．$n=k+1$ のとき ①は成り立つ

[1][2] より ①は成り立つ

39 n を3以上の自然数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$2^n>2n+1$ —— ①

[1] $n=3$ のとき．

(左辺) $= 2^3=8$

(右辺) $= 6+1=7$

よって $n=3$ のとき ①は成り立つ

[2] $n=k$ のとき ($k\geqq4$)

$2^k>2k+1$

が成り立つと仮定する

$n=k+1$ のとき

$2^{k+1}>2(k+1)+1$ を示す

(左辺)$-$(右辺) $= 2^{k+1}-2(k+1)-1$

$= 2\cdot2^k-2k-3$

$> 2(2k+1)-2k-3$

$= 4k+2-2k-3$

$= 2k-1>0$

よって．$n=k+1$ のとき ①は成り立つ

[1][2] より ①は成り立つ

40 すべての自然数 n について，7^n-1 は6の倍数である。このことを，数学的帰納法を用いて証明せよ。 —— ①

[1] $n=1$ のとき

$7-1=6$

よって．$n=1$ のとき ①は成り立つ．

[2] $n=k$ のとき

7^k-1 が 6の倍数であると仮定する．

$7^k-1=6N$ (N：整数) とおける．

$n=k+1$ のとき

$7^{k+1}-1$ が 6の倍数であることを示す．

$7^{k+1}-1 = 7\cdot7^k-1$

$= 7\cdot7^k-7+6$

$= 7(7^k-1)+6$

$= 7\cdot6N+6$

$= 6(7N+1)$

よって $n=k+1$ のとき ①は成り立つ．

[1][2] より ①は成り立つ