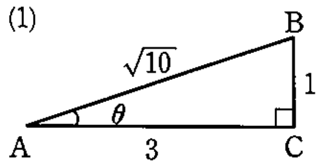
【三角比】

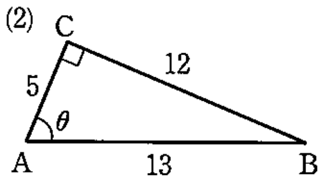
1 下の図において，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を，それぞれ求めよ。

(1)



$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$，$\tan\theta = \frac{1}{3}$

(2)



$\sin\theta = \frac{12}{13}$，$\cos\theta = \frac{5}{13}$，$\tan\theta = \frac{12}{5}$

2 次の値を求めよ。

(1) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

(2) $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

(4) $\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(5) $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(6) $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$

(7) $\sin 90^\circ = 1$

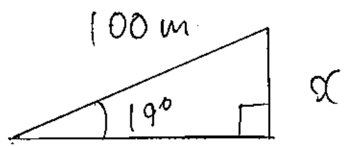
(8) $\sin 0^\circ = 0$

(9) $\cos 90^\circ = 0$

(10) $\cos 180^\circ = -1$

【三角比の応用】

3 傾斜角 19° の坂をまっすぐに 100 m 登るとき，鉛直方向には何 m 登ったことになるか。1 m 未満を四捨五入して求めよ。ただし，$\sin 19^\circ = 0.3256$，$\cos 19^\circ = 0.9455$，$\tan 19^\circ = 0.3443$ とする。



$\sin 19^\circ = \frac{x}{100}$

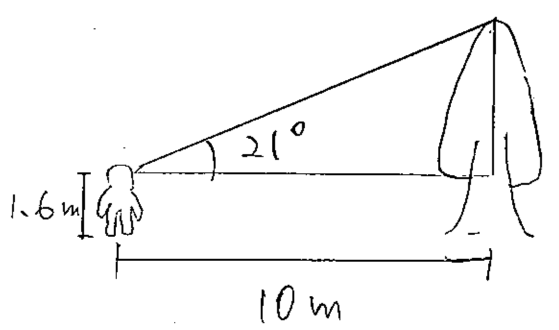
$x = \sin 19^\circ \times 100$

$= 0.3256 \times 100$

$= 32.56$

よって $33\ \mathrm{m}$

4 木の根もとから 10 m 離れた地点に立って木の先端を見上げると，水平面とのなす角が 21° であった。目の高さを 1.6 m として，木の高さを求めよ。ただし，小数第 2 位を四捨五入せよ。ただし，$\sin 21^\circ = 0.3584$，$\cos 21^\circ = 0.9336$，$\tan 21^\circ = 0.3839$ とする。



$\tan 21^\circ = \frac{x}{10}$

$x = \tan 21^\circ \times 10$

$= 0.3839 \times 10$

$= 3.839$

$\fallingdotseq 3.8$

よって

$1.6 + 3.8 = 5.4\ (\mathrm{m})$

【$90^\circ - \theta$，$180^\circ - \theta$ の三角比と式の値】

5 次の式の値を求めよ。

(1) $\sin 70^\circ + \cos 100^\circ + \sin 170^\circ + \cos 160^\circ$

$= \cos 20^\circ - \cos 80^\circ + \sin 10^\circ + \cos 20^\circ$

$= \cos 20^\circ - \sin 10^\circ + \sin 10^\circ + \cos 20^\circ$

$= 0$

(2) $\sin 140^\circ \cos 50^\circ + \cos 40^\circ \sin 50^\circ$

$= \sin 40^\circ \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \cos 40^\circ$

$= \sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ$

$= 1$

【三角比を含む方程式】

6 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次のような θ を求めよ。

(1) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = 60^\circ, 120^\circ$

(2) $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 30^\circ, 150^\circ$

(3) $\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 60^\circ$

(4) $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = 135^\circ$

(5) $\tan\theta = \frac{1}{1}$

$\theta = 45^\circ$

(6) $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\theta = 150^\circ$

【三角比の相互関係】

7 次の問いに答えよ。

(1) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta = \frac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

$x^2 + 1 = 9$

$x^2 = 8$

$x = 2\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき $\tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\cos\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき $\tan\theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(2) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\tan\theta = \frac{-2}{1}$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

$x^2 = 1 + 4$

$x^2 = 5$

$x = \sqrt{5}$

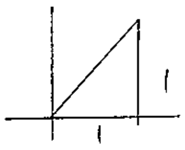
$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

【tanθ と直線の傾き】

8 次の直線と x 軸の正の向きとのなす角 θ を求めよ。

(1) $y=x$

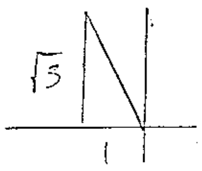
$\tan\theta = 1$



$\theta = 45°$

(2) $y=-\sqrt{3}x$

$\tan\theta = -\sqrt{3}$



$\theta = 120°$

【三角比の式の値】

9 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$

$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$

$2\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{4}$

$\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8}$

(2) $\sin\theta - \cos\theta$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= 1 - 2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)$

$= \frac{7}{4}$

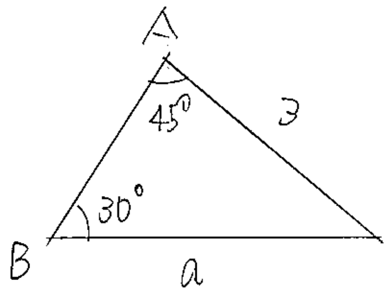
$\left(\sin\theta - \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

$\sin\theta > 0$, $\cos\theta < 0$ より $\sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{2}$

【正弦定理】

10 △ABCにおいて，次の値を求めよ。

(1) $A=45°$，$B=30°$，$b=3$ のとき，a



$\frac{a}{\sin 45°} = \frac{3}{\sin 30°}$

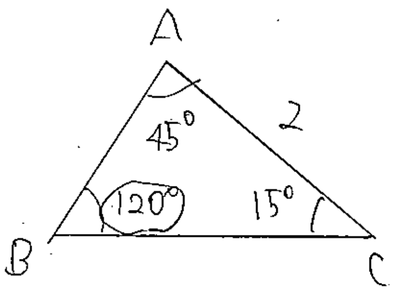
$\frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{3}{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2}a = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$a = \frac{6}{\sqrt{2}}$

$a = 3\sqrt{2}$

(2) $A=45°$，$C=15°$，$b=2$ のとき，外接円の半径R



$2R = \frac{2}{\sin 120°}$

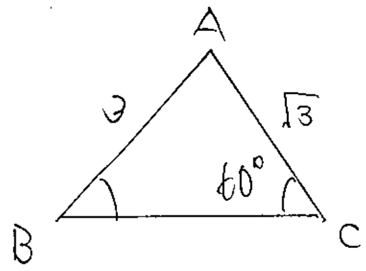
$2R = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$2R = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$R = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

(3) $b=\sqrt{3}$，$c=3$，$C=60°$ のとき，B

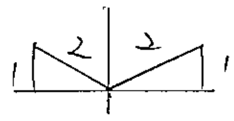


$\frac{3}{\sin 60°} = \frac{\sqrt{3}}{\sin B}$

$\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sin B}$

$3\sin B = \frac{3}{2}$

$\sin B = \frac{1}{2}$

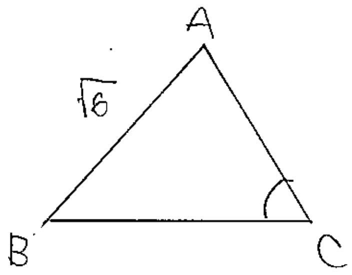


$B = 30°$, $\cancel{150°}$ 不適

よって

$B = 30°$

(4) $c=\sqrt{6}$，外接円の半径 $R=\sqrt{3}$ のとき，C



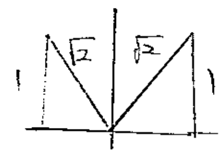
$2R = \frac{\sqrt{6}}{\sin C}$

$2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{\sin C}$

$\sin C = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

$\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\sin C = \frac{1}{\sqrt{2}}$

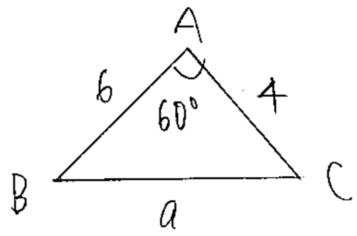


$C = 45°, 135°$

【余弦定理】

11 △ABCにおいて，次の値を求めよ。

(1) $b=4$，$c=6$，$A=60°$ のとき，a



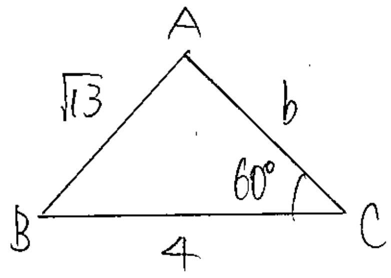
$a^2 = 36 + 16 - 2\cdot 6\cdot 4\underset{}{\overset{\frac{1}{2}}{\cos 60°}}$

$a^2 = 52 - 24$

$a^2 = 28$

$a = 2\sqrt{7}$

(2) $a=4$，$c=\sqrt{13}$，$C=60°$ のとき，b



$13 = b^2 + 16 - 2\cdot 4\cdot b\underset{\frac{1}{2}}{\cos 60°}$

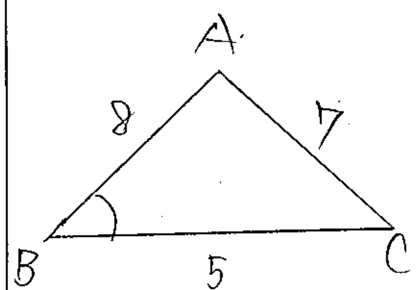
$13 = b^2 + 16 - 4b$

$b^2 - 4b + 3 = 0$

$(b-1)(b-3) = 0$

$b = 1, 3$

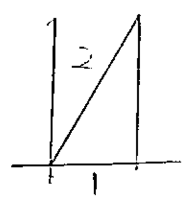
(3) $a=5$，$b=7$，$c=8$ のとき，B



$\cos B = \frac{64+25-49}{2\cdot 8\cdot 5}$

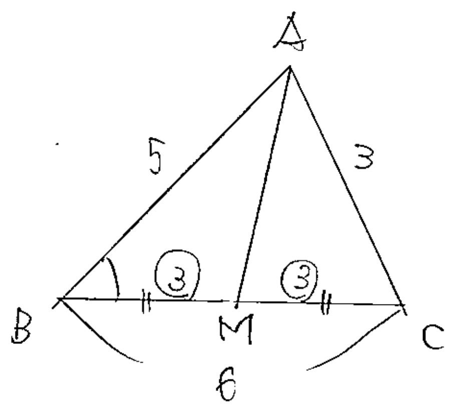
$\cos B = \frac{40}{80}$

$\cos B = \frac{1}{2}$



$B = 60°$

12 △ABCにおいて，AB=5，AC=3，BC=6とする。辺BCの中点をMとするとき，AMの長さを求めよ。



△ABC において

$\cos B = \dfrac{25+36-9}{2\cdot5\cdot6}$

$= \dfrac{52}{60}$

$= \dfrac{13}{15}$

△ABM において

$AM^2 = 25+9-2\cdot5\cdot3\cos B$

$= 34 - 30\cdot\dfrac{13}{15}$

$= 8$

よって

$AM = 2\sqrt{2}$

【鋭角·直角·鈍角三角形の判定】

13 △ABCの3辺の長さが次のようなとき，角 A が鋭角，直角，鈍角のいずれであるかを調べよ。

(1) $a=9$，$b=3\sqrt{2}$，$c=7$

$a^2=81$，$b^2=18$，$c^2=49$

$81 > 18+49$ より

鈍角

(2) $a=\sqrt{7}$，$b=\sqrt{6}$，$c=2$

$a^2=7$，$b^2=6$，$c^2=4$

$7 < 6+4$ より

鋭角

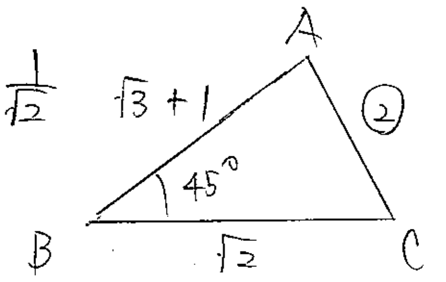
【三角形の辺と角の決定】

14 △ABCにおいて，$a=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}+1$，$B=45°$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

$b^2 = (\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\cdot\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= 2+4+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2$

$= 4$

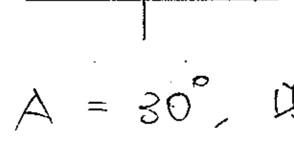


$b = 2$

$\dfrac{2}{\sin 45°} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sin A}$

$2\sin A = 1$

$\sin A = \dfrac{1}{2}$



$A = 30°$，$\cancel{150°}$ 不適

$C = 180° - 45° - 30°$

$= 105°$

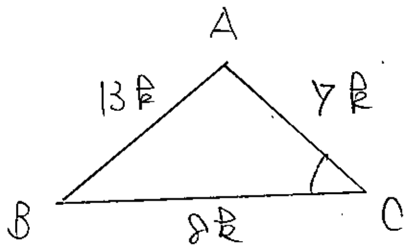
よって

$b=2$，$A=30°$，$C=105°$

15 △ABCにおいて次が成り立つとき，この三角形の最大の角の大きさを求めよ。

$\sin A : \sin B : \sin C = 8 : 7 : 13$

$a=8k$，$b=7k$，$c=13k$（k：整数）とすると



$\cos C = \dfrac{49k^2+64k^2-169k^2}{2\cdot7k\cdot8k}$

$= \dfrac{-56k^2}{112k^2} = -\dfrac{1}{2}$

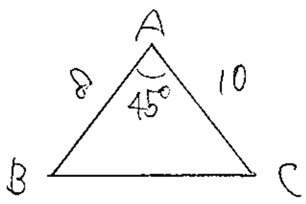
よって

$C = 120°$

【三角形の面積】

16 次のような図形の面積 S を求めよ。

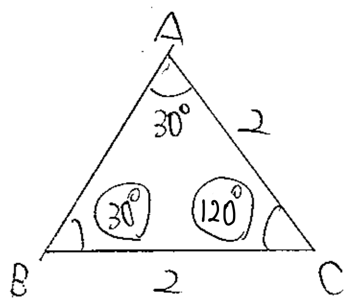
(1) $b=10$，$c=8$，$A=45°$ である△ABC



$S = \dfrac{1}{2}\cdot8\cdot10\sin45°$　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$

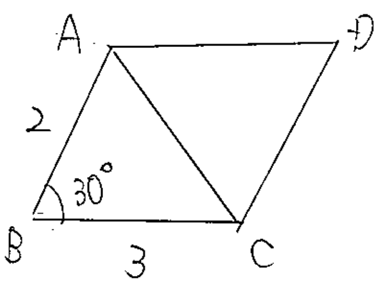
(2) $a=b=2$，$A=30°$ である△ABC



$S = \dfrac{1}{2}\cdot2\cdot2\sin120°$　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= \sqrt{3}$

(3) AB=2，BC=3，$B=30°$ である平行四辺形ABCD

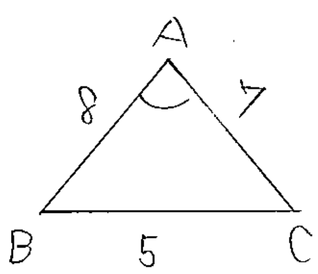


$S = 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\sin30°$　$\dfrac{1}{2}$

$= 3$

17 △ABCにおいて，$a=5$，$b=7$，$c=8$ のとき，次のものを求めよ。

(1) $\cos A$ の値

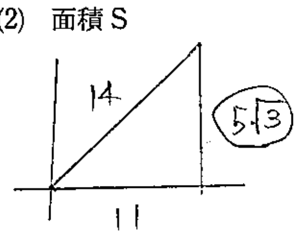


$\cos A = \dfrac{64+49-25}{2\cdot8\cdot7}$

$= \dfrac{88}{112}$

$= \dfrac{11}{14}$

(2) 面積S



$\sin A = \dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

$x^2+11^2=14^2$

$x^2 = 196-121$

$= 75$

$x = 5\sqrt{3}$

よって

$S = \dfrac{1}{2}\cdot8\cdot7\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

$= 10\sqrt{3}$

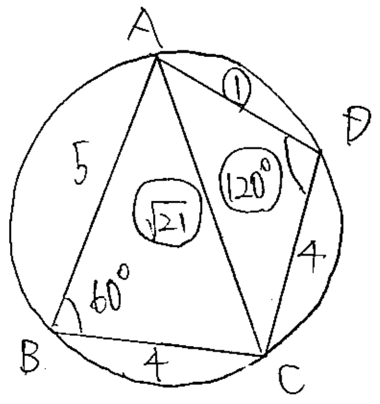
【円に内接する四角形の面積】

18 円に内接する四角形 ABCD があり，

AB＝5，BC＝4，CD＝4，$\angle B=60^\circ$

であるとき，次のものを求めよ。

(1) AC の長さ



$AC^2=16+25-2\cdot4\cdot5\cdot\frac{1}{2}$

$=41-20$

$=21$

$AC=\sqrt{21}$

(2) AD の長さ

$21=x^2+4^2-2\cdot4\cdot x\cos\cdot120^\circ$

$21=x^2+16-8x\left(-\frac{1}{2}\right)$

$21=x^2+16+4x$

$x^2+4x-5=0$

$(x+5)(x-1)=0$

$x=1,\ \cancel{-5}$

不適

よって

$AD=1$

(3) 四角形 ABCD の面積を求めよ。

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot4\cdot5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=5\sqrt{3}$

$\triangle ADC=\frac{1}{2}\cdot1\cdot4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{3}$

よって

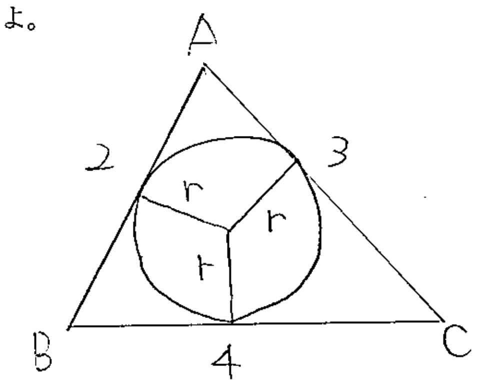
$\square ABCD=\triangle ABC+\triangle ADC$

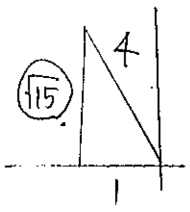
$=5\sqrt{3}+\sqrt{3}$

$=6\sqrt{3}$

【三角形の内接円の半径と面積】

19 $\triangle ABC$ において，$a=4$，$b=3$，$c=2$ のとき，この三角形の内接円の半径 r を求めよ。





$x^2+1=16$

$x^2=15$

$x=\sqrt{15}$

$\sin A=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$S=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}$

$=\frac{3\sqrt{15}}{4}$

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

面積 S を求める

$\cos A=\frac{4+9-16}{2\cdot2\cdot3}$

$=\frac{-3}{12}$

$=-\frac{1}{4}$

よって

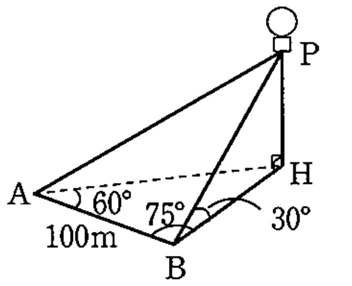
$\frac{3\sqrt{15}}{4}=\frac{1}{2}r(2+3+4)$

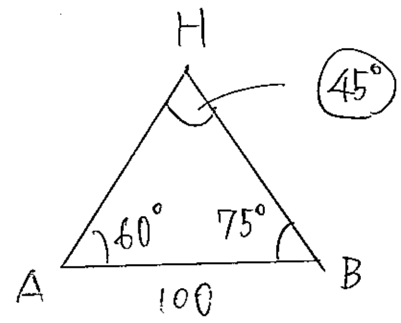
$\frac{9}{2}r=\frac{3\sqrt{15}}{4}$

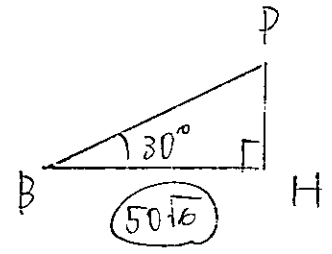
$r=\frac{\sqrt{15}}{6}$

【空間図形への応用】

20 100 m 離れた 2 地点 A と B から，気球 P の真下の地点 H を見たとき，$\angle HAB=60^\circ$，$\angle HBA=75^\circ$ であった。また，B から P を見上げた角度は 30° であった。図において，気球 P の高さ PH を求めよ。







$\frac{HB}{\sin60^\circ}=\frac{100}{\sin45^\circ}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}HB=100\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$HB=50\sqrt{6}$

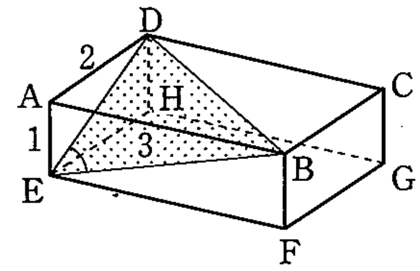
$\tan30^\circ=\frac{PH}{50\sqrt{6}}$

$PH=50\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$

$PH=50\sqrt{2}\ m$

21 AB＝3，AD＝2，AE＝1 である直方体 ABCD－EFGH がある。

(1) $\cos\angle BED$ の値を求めよ。



$DE^2=1^2+2^2$

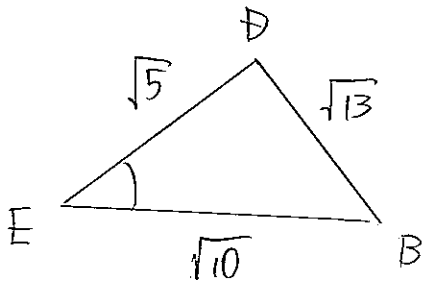
$DE=\sqrt{5}$

$BE^2=1^2+3^2$

$BE=\sqrt{10}$

$BD^2=3^2+2^2$

$BD=\sqrt{13}$

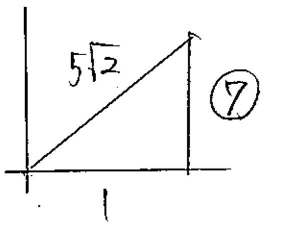


$\cos\angle BED=\frac{5+10-13}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}$

$=\frac{1}{\sqrt{50}}$

$=\frac{1}{5\sqrt{2}}$

(2) $\triangle BED$ の面積 S を求めよ。



$x^2+1^2=(5\sqrt{2})^2$

$x^2=49$

$x=7$

$\sin\angle BED=\frac{7}{5\sqrt{2}}$

よって

$S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{7}{5\sqrt{2}}$

$=\frac{7}{2}$