

2次関数①



【関数の値】

1 2次関数 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ において、次の値を求めよ。

$$(1) f(3) = 9 - 6 + 1 = 4$$

$$(2) f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$$

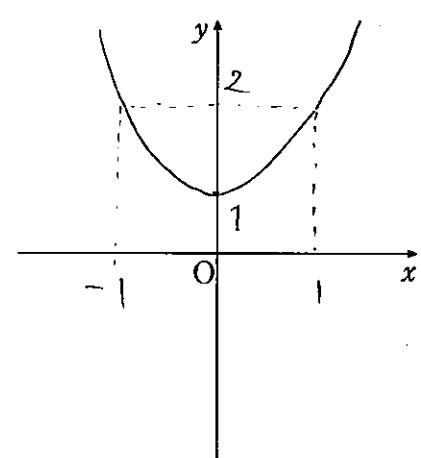
$$(3) f(-a) = (-a)^2 - 2 \cdot (-a) + 1 = a^2 + 2a + 1$$

$$(4) f(a+1) = (a+1)^2 - 2(a+1) + 1 = a^2 + 2a + 1 - 2a - 2 + 1 = a^2$$

【 $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ】

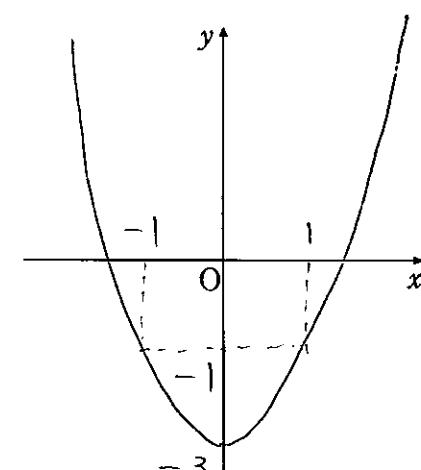
2 次の2次関数のグラフをかき、その頂点を求めよ。

(1) $y = x^2 + 1$



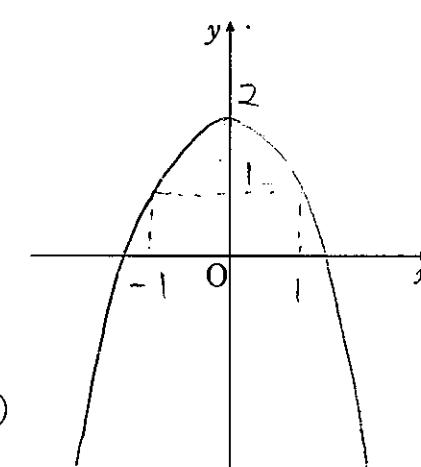
頂点 $(0, 1)$

(2) $y = 2x^2 - 3$



頂点 $(0, -3)$

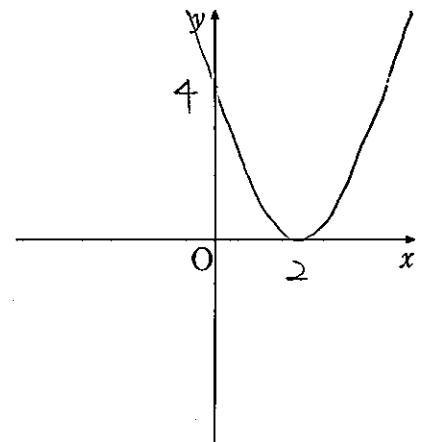
(3) $y = -x^2 + 2$



頂点 $(0, 2)$

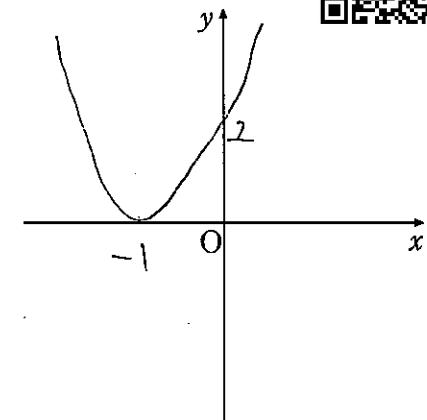
3 次の2次関数のグラフをかき。また、その頂点と軸を求めよ。

(1) $y = (x-2)^2$



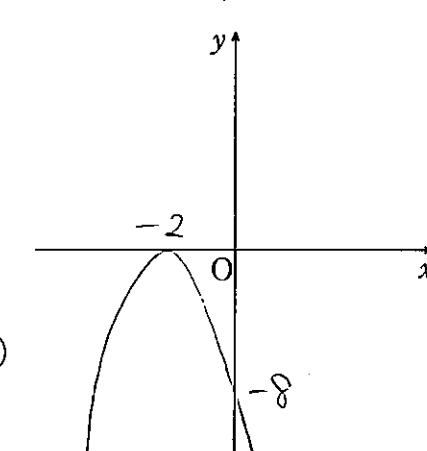
頂点 $(2, 0)$
軸 $x = 2$

(2) $y = 2(x+1)^2$



頂点 $(-1, 0)$
軸 $x = -1$

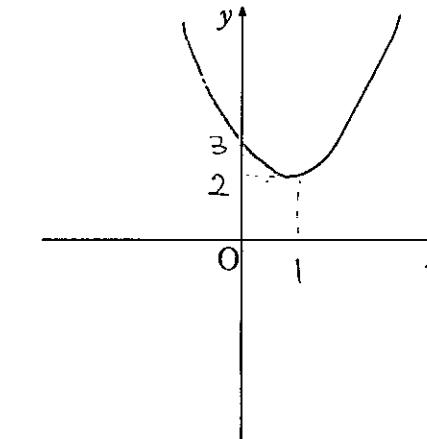
(3) $y = -2(x+2)^2$



頂点 $(-2, 0)$
軸 $x = -2$

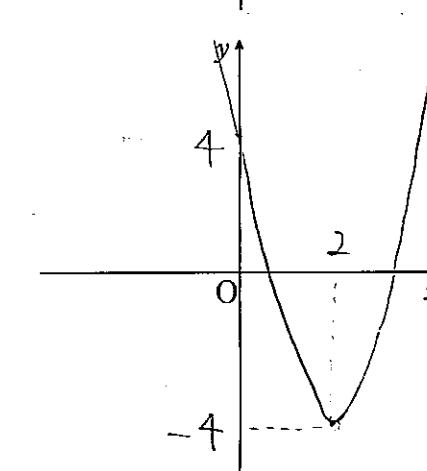
4 次の2次関数のグラフをかけ。また、その頂点と軸を求めよ。

(1) $y = (x-1)^2 + 2$



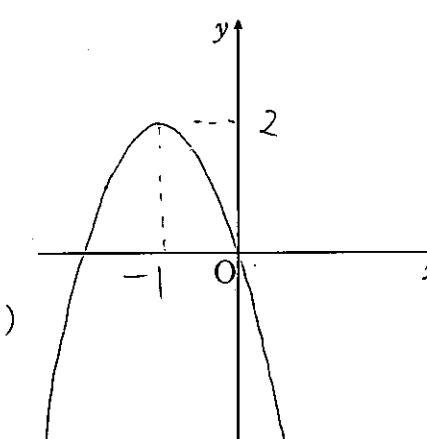
頂点 $(1, 2)$
軸 $x = 1$

(2) $y = 2(x-2)^2 - 4$



頂点 $(2, -4)$
軸 $x = 2$

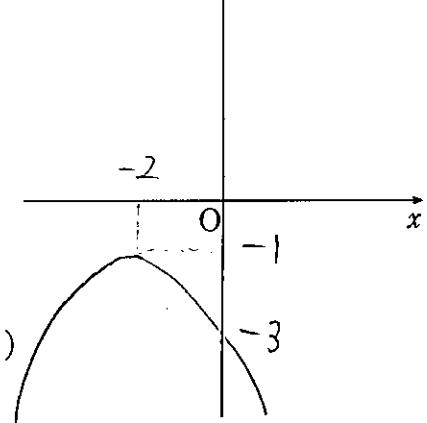
(3) $y = -2(x+1)^2 + 2$



頂点 $(-1, 2)$
軸 $x = -1$

(4) $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$

$$\begin{aligned} y(0) &= -\frac{1}{2} \cdot 4 - 1 \\ &= -2 - 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$



頂点 $(-2, -1)$
軸 $x = -2$

2次関数②

【 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ】

[5] 次の2次式を平方完成せよ。

$$(1) x^2+8x = \underline{\underline{(x+4)^2-16}}$$

$$(2) x^2-6x+8 = \underline{\underline{(x-3)^2-9+8}} \\ = \underline{\underline{(x-3)^2-1}}$$

$$(3) 2x^2+4x+5 = 2(x^2+2x)+5 \\ = 2\{(x+1)^2-1\}+5 \\ = 2(x+1)^2-2+5 \\ = \underline{\underline{2(x+1)^2+3}}$$

$$(4) 3x^2-6x-2 = 3(x^2-2x)-2 \\ = 3\{(x-1)^2-1\}-2 \\ = \underline{\underline{3(x-1)^2-5}}$$

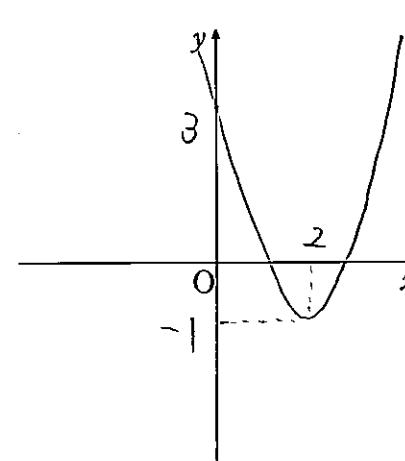
$$(5) x^2+x-2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2 \\ = \underline{\underline{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}}$$

$$(6) -2x^2+6x+4 = -2(x^2-3x)+4 \\ = -2\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}+4 \\ = -2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}+4 \\ = \underline{\underline{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{2}}}$$

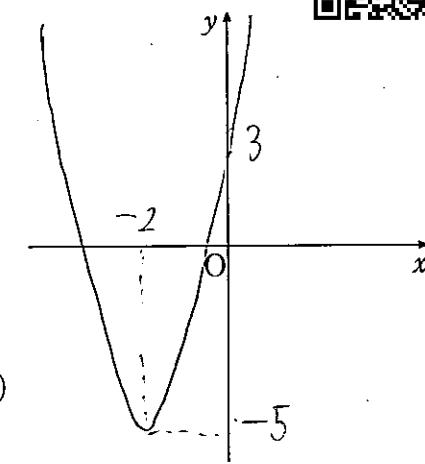
[6] 次の2次関数のグラフをかけ。また、その頂点と軸を求めよ。

(1) $y=x^2-4x+3$

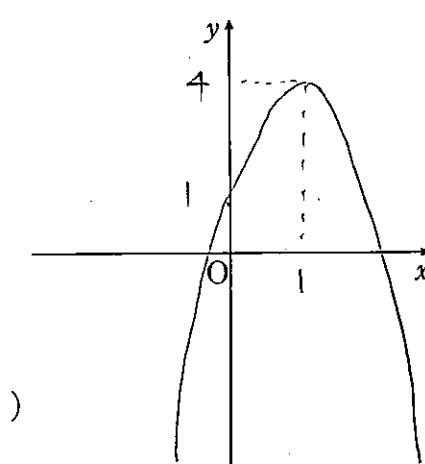
$$= (x-2)^2-4+3 \\ = (x-2)^2-1$$

頂点 (2, -1)
軸 $x=2$ (2) $y=2x^2+8x+3$

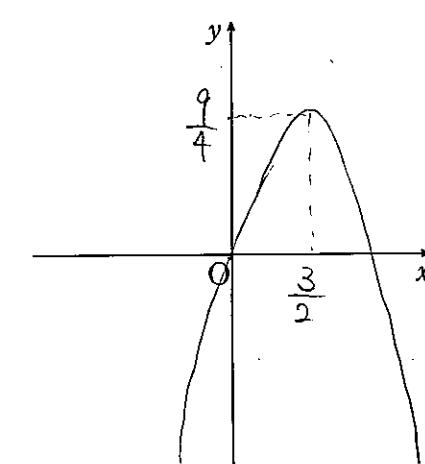
$$= 2(x^2+4x)+3 \\ = 2\{(x+2)^2-4\}+3 \\ = 2(x+2)^2-5$$

頂点 (-2, -5)
軸 $x=-2$ (3) $y=-3x^2+6x+1$

$$= -3(x^2-2x)+1 \\ = -3\{(x-1)^2-1\}+1 \\ = -3(x-1)^2+4$$

頂点 (1, 4)
軸 $x=1$ (4) $y=-x^2+3x$

$$= -(x^2-3x) \\ = -\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\} \\ = -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

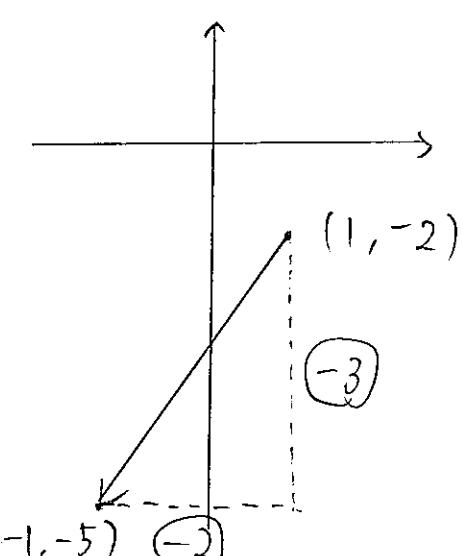
頂点 ($\frac{3}{2}$, $\frac{9}{4}$)
軸 $x=\frac{3}{2}$ 

【グラフの平行移動】

[7] 放物線 $y=2x^2-4x$ を平行移動して放物線 $y=2x^2+4x-3$ に重ねるには、どのように平行移動すればよいか。

$$y = 2x^2-4x \\ = 2(x^2-2x) \\ = 2\{(x-1)^2-1\} \\ = 2(x-1)^2-2$$

頂点 (1, -2)

 $y = 2x^2+4x-3$

$$= 2(x^2+2x)-3$$

$$= 2\{(x+1)^2-1\}-3$$

$$= 2(x+1)^2-5$$

頂点 (-1, -5)

x軸方向に -2

y軸方向に -3

2次関数③

- 8 2次関数 $y=2x^2-5x+3$ のグラフを、 x 軸方向に -2 , y 軸方向に 1 だけ平行移動するとき、移動後の放物線の方程式を求めよ。

$$y-1 = 2(x+2)^2 - 5(x+2) + 3$$

$$y-1 = 2(x^2+4x+4) - 5x - 10 + 3$$

$$y = 2x^2+8x+8 - 5x - 6$$

$$\underline{y = 2x^2+3x+2}$$

$$\begin{array}{l} x \rightarrow x+2 \\ y \rightarrow y-1 \end{array}$$

【グラフの対称移動】

- 9 2次関数 $y=x^2+4x+1$ のグラフの、 x 軸、 y 軸、原点それぞれに関する対称移動後の放物線の方程式を求めよ。

$$\begin{array}{l} x\text{軸} : -y = x^2+4x+1 \\ \underline{y = -x^2-4x-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y\text{軸} : y = (-x)^2+4(-x)+1 \\ \underline{y = x^2-4x+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{原点} : -y = (-x)^2+4(-x)+1 \\ -y = x^2-4x+1 \\ \underline{y = -x^2+4x-1} \end{array}$$

【関数の最大・最小】

- 10 次の2次関数に最大値、最小値があれば、それを求めよ。

- (1) $y=-2x^2+8x-3$

$$\begin{aligned} &= -2 \left\{ x^2-4x \right\} - 3 \\ &= -2 \left\{ (x-2)^2-4 \right\} - 3 \\ &= -2(x-2)^2 + 5 \\ &\text{Max } 5 \quad (x=2) \\ &\text{Min } \text{なし} \end{aligned}$$

- (2) $y=x^2+3x+1$

$$\begin{aligned} &= \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} + 1 \\ &= \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{5}{4} \\ &\text{Max } \text{なし} \\ &\text{Min } -\frac{5}{4} \quad \left(x = -\frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

- (3) $y=-2x^2+5x$

$$\begin{aligned} &= -2 \left\{ x^2 - \frac{5}{2}x \right\} \\ &= -2 \left\{ \left(x - \frac{5}{4} \right)^2 - \frac{25}{16} \right\} \\ &= -2 \left(x - \frac{5}{4} \right)^2 + \frac{25}{8} \\ &\text{Max } \frac{25}{8} \quad \left(x = \frac{5}{4} \right) \\ &\text{Min } \text{なし} \end{aligned}$$

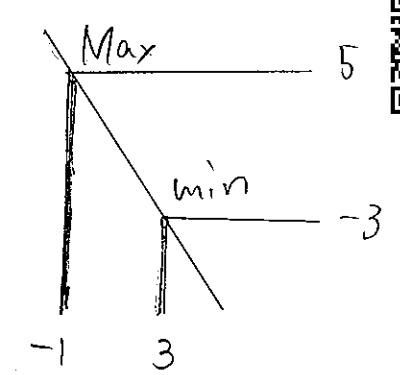
- 11 次の関数に最大値、最小値があれば、それを求めよ。また、(1), (2)は値域を求めよ。

- (1) $y=-2x+3 \quad (-1 \leq x \leq 3)$

$$\text{Max } 5 \quad (x=-1)$$

$$\text{Min } -3 \quad (x=3)$$

$$\text{値域 } -3 \leq y \leq 5$$



- (2) $y=x^2+2x+3 \quad (-2 \leq x \leq 2)$

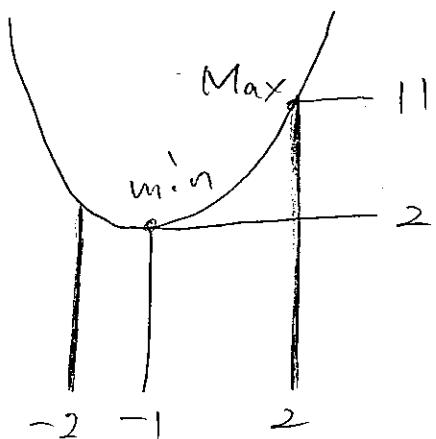
$$= (x+1)^2 - 1 + 3$$

$$= (x+1)^2 + 2$$

$$\text{Max } 11 \quad (x=2)$$

$$\text{Min } 2 \quad (x=-1)$$

$$\text{値域 } 2 \leq y \leq 11$$

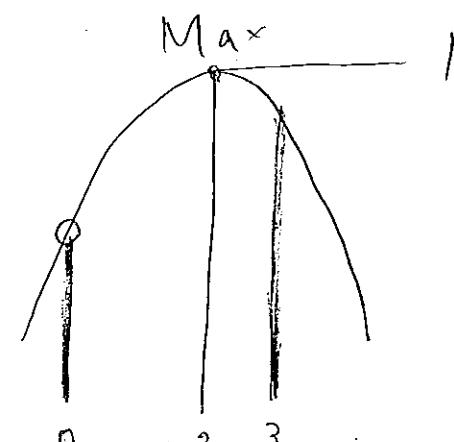


- (3) $y=-x^2+4x-3 \quad (0 < x \leq 3)$

$$= -\{x^2-4x\} - 3$$

$$= -\{(x-2)^2-4\} - 3$$

$$= -(x-2)^2 + 1$$



- (4) $y=3x^2+6x-1 \quad (1 \leq x \leq 3)$

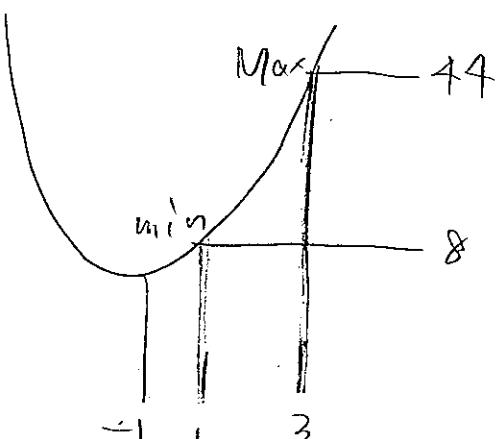
$$= 3\{x^2+2x\} - 1$$

$$= 3\{(x+1)^2-1\} - 1$$

$$= 3(x+1)^2 - 4$$

$$\text{Max } 44 \quad (x=3)$$

$$\text{Min } 8 \quad (x=1)$$



- (5) $y=-2x^2+12x \quad (0 \leq x \leq 6)$

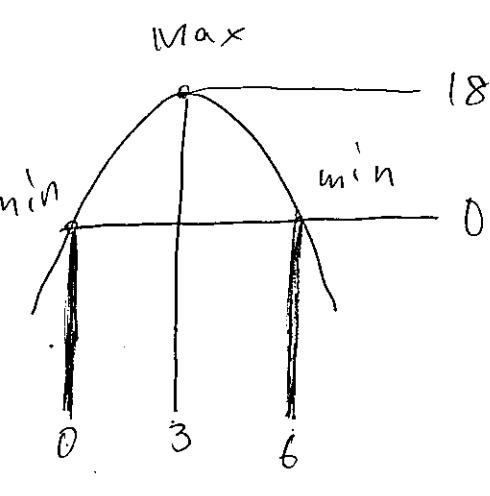
$$= -2\{x^2-6x\}$$

$$= -2\{(x-3)^2-9\}$$

$$= -2(x-3)^2 + 18$$

$$\text{Max } 18 \quad (x=3)$$

$$\text{Min } 0 \quad (x=0, 6)$$

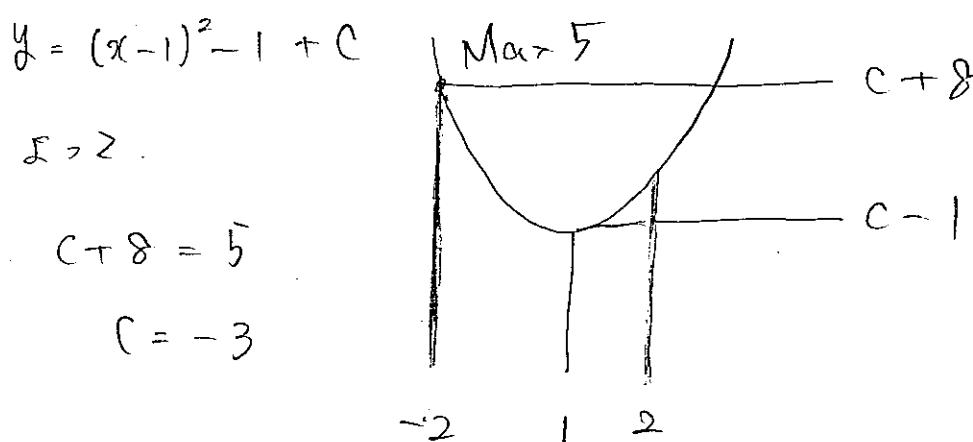


2次関数④

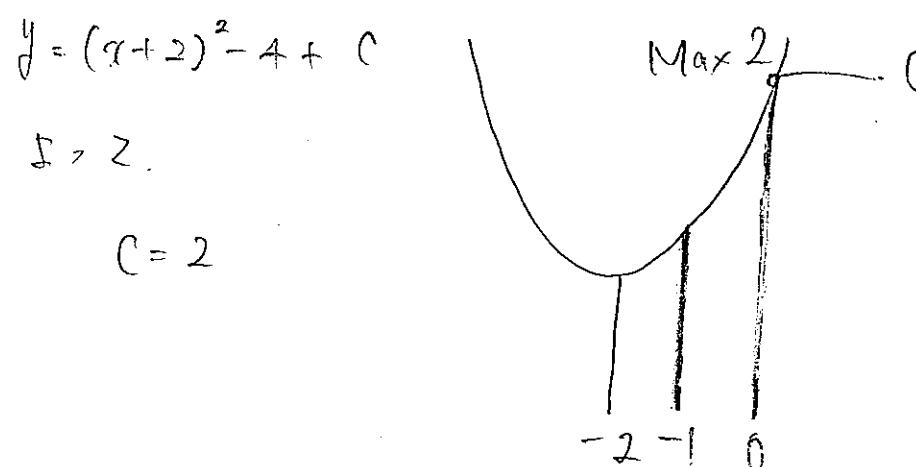


12 次の条件を満たすように、定数 c の値を定めよ。

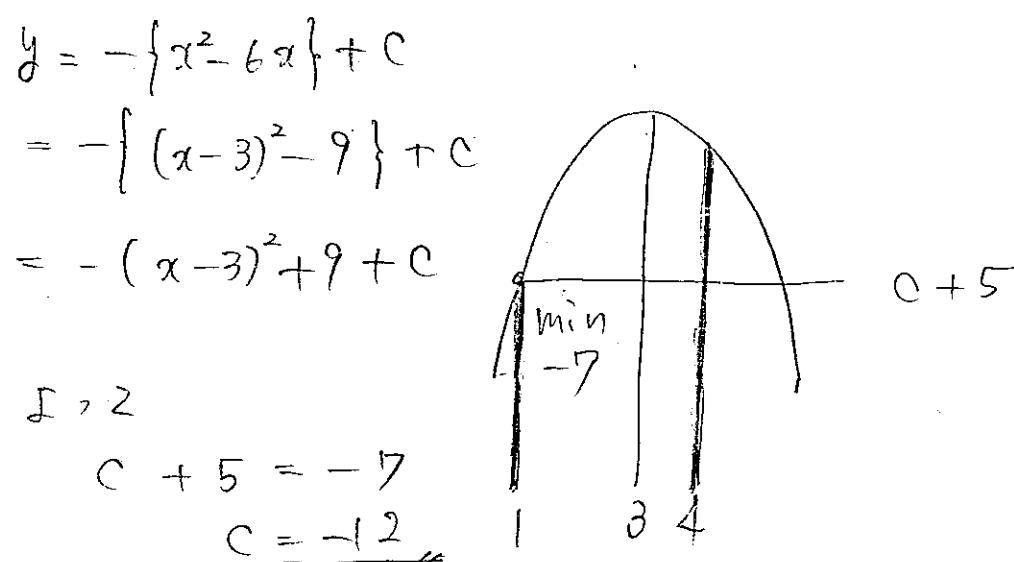
(1) 関数 $y = x^2 - 2x + c$ ($-2 \leq x \leq 2$) の最大値が 5 である。



(2) 関数 $y = x^2 + 4x + c$ ($-1 \leq x \leq 0$) の最大値が 2 である。



(3) 関数 $y = -x^2 + 6x + c$ ($1 \leq x \leq 4$) の最小値が -7 である。



13 直角三角形 ABCにおいて、直角をはさむ2辺 AB, BC の長さの和が 14 cm であるとする。このような三角形の面積の最大値を求めよ。

$$AB = x \quad \text{とす}$$

$$BC = 14 - x$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}x(14-x)$$

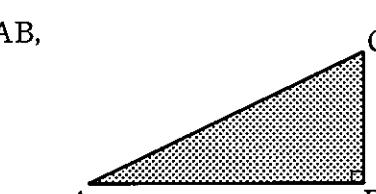
$$= -\frac{1}{2}x^2 + 7x$$

$$= -\frac{1}{2}\{x^2 - 14x\}$$

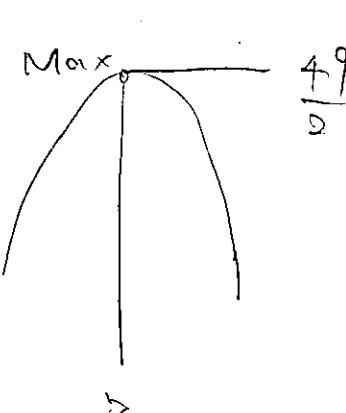
$$= -\frac{1}{2}\{(x-7)^2 - 49\}$$

$$= -\frac{1}{2}(x-7)^2 + \frac{49}{2}$$

$$\therefore \frac{49}{2} \text{ cm}^2$$



範囲 12
 $x > 0 \quad 14 - x > 0$
 $x < 14$
 $0 < x < 14$

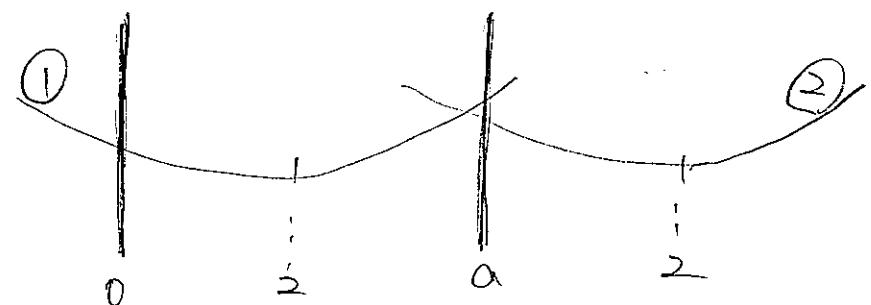


【定義域が広がるときの最大・最小】

14 $a > 0$ とする。関数 $y = x^2 - 4x + 5$ ($0 \leq x \leq a$) について、次の問いに答えよ。

(1) 最小値を求めよ。

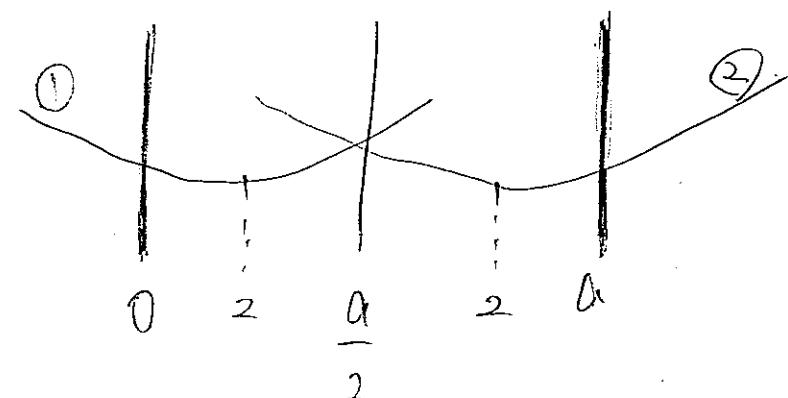
$$y = (x-2)^2 + 1 \quad \text{頂点 } (2, 1)$$



② $a \leq 2 \quad a < 2$

$$\min y = y(a) = a^2 - 4a + 5 \quad (x=a)$$

(2) 最大値を求めよ。



$$\max y(a) = a^2 - 4a + 5$$

$$\max y(0) = 5 \quad (x=0)$$

$$(2) \quad 0 \leq a \quad a < 2$$

$$\max y(0) = 5 \quad (x=0)$$

2次関数⑤

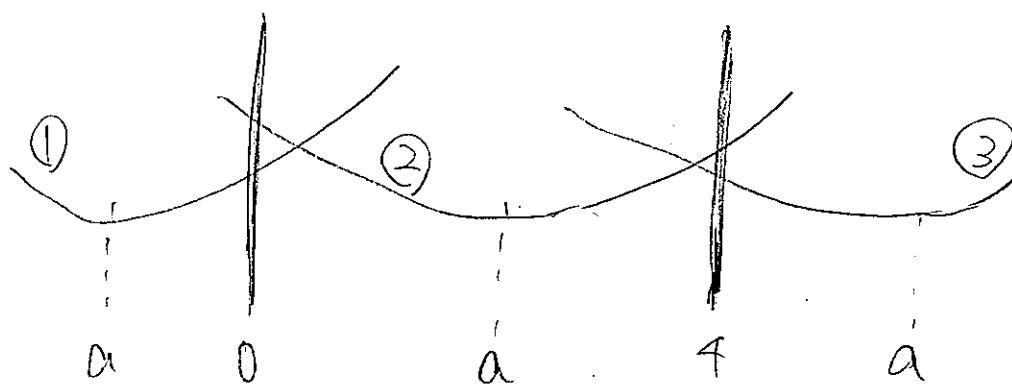


【軸が動くときの最大・最小】

15 関数 $y = x^2 - 2ax + 4$ ($0 \leq x \leq 4$)について、次の問いに答えよ。

(1) 最小値を求めよ。

$$y = (x-a)^2 - a^2 + 4 \quad \text{頂点 } (a, -a^2 + 4)$$



$$\textcircled{1} \quad a \leq 0 \quad a \in \mathbb{Z}$$

$$\min y(0) = 4 \quad (x=0)$$

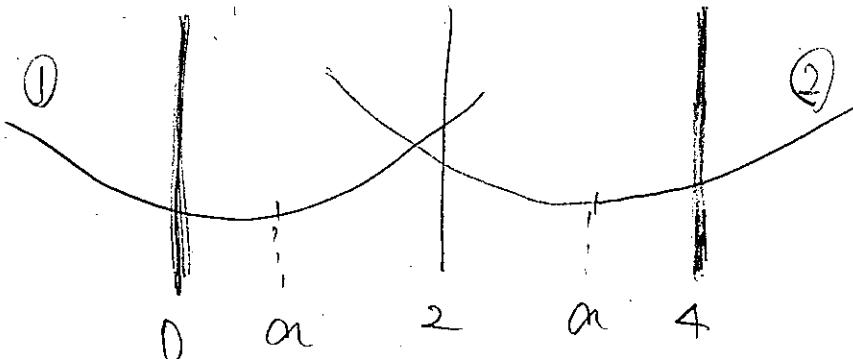
$$\textcircled{2} \quad 0 \leq a \leq 4 \quad a \in \mathbb{Z}$$

$$\min -a^2 + 4 \quad (x=a)$$

$$\textcircled{3} \quad 4 \leq a$$

$$\begin{aligned} \min y(4) &= 16 - 8a + 4 \\ &= 20 - 8a \quad (x=4) \end{aligned}$$

(2) 最大値を求めよ。



$$\textcircled{1} \quad a \leq 2 \quad a \in \mathbb{Z}$$

$$\max y(4) = 20 - 8a \quad (x=4)$$

$$\textcircled{2} \quad 2 \leq a \quad a \in \mathbb{Z}$$

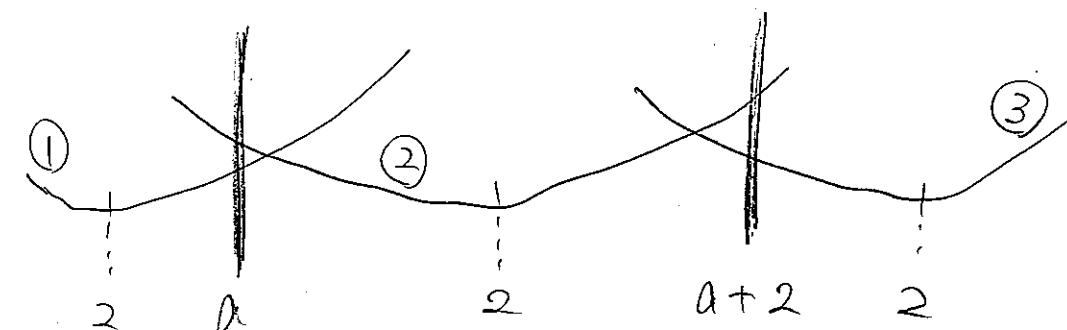
$$\max y(0) = 4 \quad (x=0)$$

【区間が動くときの最大・最小】

16 関数 $y = x^2 - 4x + 3$ ($a \leq x \leq a+2$)について次の問いに答えよ。

(1) 最小値を求めよ。

$$y = (x-2)^2 - 1 \quad \text{頂点 } (2, -1)$$



$$\textcircled{1} \quad 2 \leq a \quad a \in \mathbb{Z}$$

$$\min y(a) = a^2 - 4a + 3 \quad (x=a)$$

$$\textcircled{3} \quad a+2 \leq 2$$

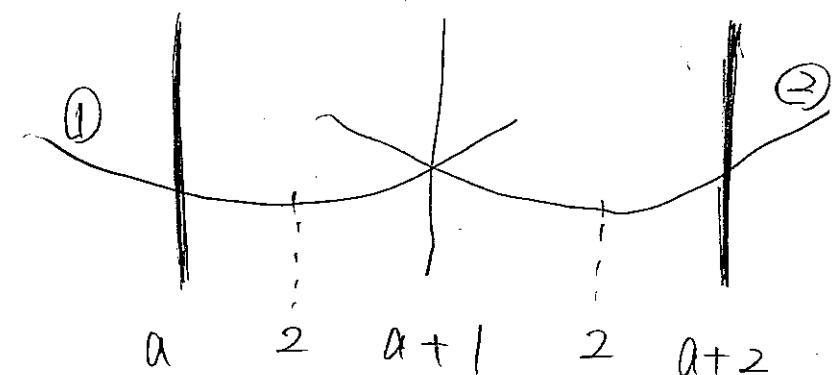
$$a \leq 0 \quad a \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \min y(a+2) &= (a+2)^2 - 4(a+2) + 3 \\ &= a^2 + 4a + 4 - 4a - 8 + 3 \\ &= a^2 - 1 \quad (x=a+2) \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad 0 \leq a \leq 2 \quad a \in \mathbb{Z}$$

$$\min -1 \quad (x=2)$$

(2) 最大値を求めよ。



$$\textcircled{1} \quad 2 \leq a+1$$

$$1 \leq a \quad a \in \mathbb{Z}$$

$$\max y(a+2) = a^2 - 1 \quad (x=a+2)$$

$$\textcircled{2} \quad a \leq 1 \quad a \in \mathbb{Z}$$

$$\max y(a) = a^2 - 4a + 3 \quad (x=a)$$

2次関数⑥



【2次関数の決定（軸、頂点が条件）】

17 グラフが次の条件を満たす2次関数を求めよ。

(1) 頂点が点(-2, 4)で、点(-4, 2)を通る。

$$y = a(x+2)^2 + 4$$

条件より

$$2 = a(-4+2)^2 + 4$$

$$4a = -2$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 4$$

(2) 軸が直線 $x=1$ で、2点(3, -6), (0, -3)を通る。

$$y = a(x-1)^2 + b$$

条件より

$$\begin{cases} -6 = 4a + b & \text{--- ①} \\ -3 = a + b & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2}$$

$$-3 = 3a$$

$$a = -1$$

$$\textcircled{2} \text{ 代入}$$

より

$$-3 = -1 + b$$

$$b = -2$$

$$y = -(x-1)^2 - 2$$

【2次関数の決定（最大値、最小値が条件）】

18 次の条件を満たす2次関数を求めよ。

(1) $x=-1$ で最大となり、そのグラフが2点(1, 5), (3, -7)を通る。

$$y = a(x+1)^2 + b \quad (a < 0)$$

条件より

$$\begin{cases} 5 = 4a + b & \text{--- ①} \\ -7 = 16a + b & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1}$$

$$-12 = 12a$$

$$a = -1 \quad (a < 0 \text{ に満たす})$$

$$\textcircled{2} \text{ 代入}$$

$$-7 = -16 + b$$

$$b = 9$$



より

$$y = -(x+1)^2 + 9$$

(2) $x=2$ で最小値1をとり、 $x=4$ のとき $y=9$ となる

$$y = a(x-2)^2 + 1 \quad (a > 0)$$

条件より

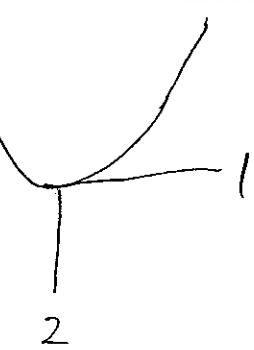
$$9 = 4a + 1$$

$$4a = 8$$

$$a = 2 \quad (a > 0 \text{ に満たす})$$

より

$$y = 2(x-2)^2 + 1$$



19 2次関数のグラフが(2, -2), (3, 5), (-1, 1)を通るとき、その2次関数を求めよ。

$$y = ax^2 + bx + c$$

条件より

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -2 & \text{--- ①} \\ 9a + 3b + c = 5 & \text{--- ②} \\ a - b + c = 1 & \text{--- ③} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1}$$

$$5a + b = 7 \quad \text{--- ④}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3}$$

$$8a + 4b = 4$$

$$2a + b = 1 \quad \text{--- ⑤}$$

$$\textcircled{4} - \textcircled{5}$$

$$a = 2, b = -3 \text{ を } \textcircled{3} \text{ に代入}$$

$$2a = 6$$

$$a = 2$$

$$\begin{aligned} 2 + 3 + c &= 1 \\ c &= -4 \end{aligned}$$

$$\textcircled{5} \text{ に代入}$$

$$4 + b = 1$$

$$b = -3$$

$$y = 2x^2 - 3x - 4$$

【条件式がある場合の最大・最小】

20 実数 x, y が $2x+y=5$ を満たしながら変化するとき、 x^2+y^2 の最小値と、そのときの x, y の値を求めよ。

$$y = 5 - 2x \quad \text{--- ①}$$

$$\textcircled{1} \text{ と } \textcircled{2} \text{ に代入}$$

$$x^2 + (5-2x)^2 = x^2 + 25 - 20x + 4x^2$$

$$= 5x^2 - 20x + 25$$

$$= 5 \{ x^2 - 4x \} + 25$$

$$= 5 \{ (x-2)^2 - 4 \} + 25$$

$$= 5(x-2)^2 - 20 + 25$$

$$= 5(x-2)^2 + 5$$

$$\min 5 \quad (x=2, y=1)$$

$$x=2 \text{ は } \textcircled{1} \text{ に代入}$$

2次関数⑦



【2次方程式】

21 次の2次方程式を解け。

(1) $x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

$\underline{x = -2, 1}$

(3) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

$(2x-1)^2 = 0$

$\alpha = \frac{1}{2}$ (重解)

(5) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

$x = -\sqrt{3} \pm \sqrt{3-3}$

$\underline{x = -\sqrt{3}}$ (重解)

(2) $-2x^2 - 5x + 3 = 0$

$2x^2 + 5x - 3 = 0$
 $(x+3)(2x-1) = 0$

$x = -3, \frac{1}{2}$

(4) $x^2 - x - 1 = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$
 $= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(6) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$

$x = \sqrt{3} \pm \sqrt{3-2}$

$\underline{x = \sqrt{3} \pm 1}$

(7) $x^2 - 2x - 5 = 0$

$x = 1 \pm \sqrt{1+5}$

$\underline{x = 1 \pm \sqrt{6}}$

(8) $3x = 1 - 2x^2$

$2x^2 + 3x - 1 = 0$

$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9+8}}{4}$

$= \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{4}$

(9) $(x-6)(x+2) = 0$

(10) $x^2 + (a+2)x + 2a = 0$

$x^2 - 4x - 12 - 9 = 0$

$x^2 - 4x - 21 = 0$

$(x-7)(x+3) = 0$

$\underline{x = -3, 7}$

$(x+a)(x+2) = 0$

$\underline{x = -a, -2}$

$\underline{x = -a, -2}$

【2次方程式の実数解の個数】

23 次の2次方程式の実数解の個数を求めよ。

(1) $x^2 + 3x - 5 = 0$

$\boxed{\Delta}$

(2) $3x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Delta = 25 - 48$

$= -23 < 0$

$\underline{\Delta > 25}$

$\underline{\Delta > 0}$

(3) $3x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

$\frac{\Delta}{4} = 3 - 3$

$= 0$

$\underline{\Delta = 12}$

24 2次方程式 $x^2 - 4x + m = 0$ が実数解をもつとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

$\frac{\Delta}{4} = 4 - m \geq 0$

$\boxed{\Delta \geq 0}$

$-m \geq -4$

$\underline{m \leq 4}$

25 2次方程式 $x^2 + (m+2)x + m+5 = 0$ が重解をもつとき、定数 m の値を求めよ。また、そのときの重解を求めよ。

$\boxed{\Delta = 0}$

$\Delta = (m+2)^2 - 4(m+5) = 0$

$m^2 + 4m + 4 - 4m - 20 = 0$

$m^2 - 16 = 0$

$m^2 = 16$

$m = \pm 4$

$m = 4 \text{ のとき}$

$x^2 + 6x + 9 = 0$

$(x+3)^2 = 0$

$x = -3$ (重解)

$m = -4 \text{ のとき}$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0$

$x = 1$ (重解)

【方程式の解から係数決定】

22 2次方程式 $2x^2 + ax - 3b = 0$ の解が $x = -2, 3$ であるとき、定数 a, b の値を求めよ。

条件より

$$\begin{cases} 18 + 3a - 3b = 0 & \text{---(1)} \\ 8 - 2a - 3b = 0 & \text{---(2)} \end{cases}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$

②に代入

$$\begin{aligned} 10 + 5a &= 0 & 8 + 4 - 3b &= 0 & \underline{x = 2} \\ a &= -2 & 3b &= 12 & a = -2 \\ & & b &= 4 & \underline{b = 4} \end{aligned}$$

$\underline{x = 2}$

$m = 4 \text{ のとき } x = -3$

$m = -4 \text{ のとき } x = 1$

2次関数⑧



【x軸との共有点の座標】

26 次の2次関数のグラフとx軸の共有点の座標を求めよ。

(1) $y = x^2 - 2x - 3$

(2) $y = -x^2 + 3x - 1$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x = -1, 3$

よって

$(-1, 0), (3, 0)$

$-x^2 + 3x - 1 = 0$

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$

$= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0 \right), \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 0 \right)$

27 次の2次関数のグラフがx軸から切り取る線分の長さを求めよ。

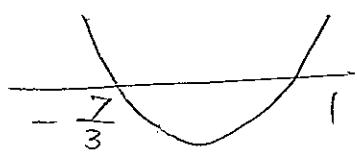
(1) $y = 3x^2 + 4x - 7$

(2) $y = x^2 + 2x - 1$

$3x^2 + 4x - 7 = 0$

$(3x+7)(x-1) = 0$

$x = -\frac{7}{3}, 1$



$1 - \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{10}{3}$

【x軸との共有点の個数】

28 次の2次関数のグラフとx軸の共有点の個数を求めよ。

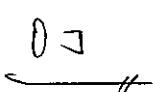
(1) $y = x^2 + 3x + 3$

(2) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

$D = 9 - 12$

$= -3 < 0$

よって

29 2次関数 $y = x^2 - 2x - m - 1$ のグラフとx軸の共有点の個数は、定数 m の値によってどのように変わるか。

D

$\frac{D}{4} = 1 - (-m-1)$

$= m + 2$

$\frac{D}{4} > 0$

$m + 2 > 0$

$m > -2 \quad \text{のとき} \quad 2コ$

$\frac{D}{4} = 0$

$m = -2 \quad \text{のとき} \quad 1コ$

$\frac{D}{4} < 0$

$m < -2 \quad \text{のとき} \quad 0コ$

【放物線と直線の共有点の座標】

30 放物線 $y = x^2 - 6x + 11$ と次の直線の共有点の座標を求めよ。

(1) $y = 3x - 3$

(2) $y = -2x + 7$

$x^2 - 6x + 11 = 3x - 3 \quad x^2 - 6x + 11 = -2x + 7$

$x^2 - 9x + 14 = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x-7)(x-2) = 0$

$(x-2)^2 = 0$

$x = 2, 7$

$x = 2 \quad (\text{重解})$

よって

$(2, 3), (7, 18)$

よって

$(2, 3)$

【放物線と直線の共有点の個数】

31 放物線 $y = -x^2 + 3x - 3$ と直線 $y = x + k$ の共有点の個数は、定数 k の値によってどのように変わるか。

D

$-x^2 + 3x - 3 = x + k$

$x^2 - 2x + k + 3 = 0$

$(a=1 \quad b=-2 \quad c=k+3)$

$\frac{D}{4} = 1 - (k+3)$

$= -k - 2$

$\frac{D}{4} > 0 \quad -k - 2 > 0$

$k < -2 \quad \text{のとき} \quad 2コ$

$\frac{D}{4} = 0 \quad k = -2 \quad \text{のとき} \quad 1コ$

$\frac{D}{4} < 0 \quad k < -2 \quad \text{のとき} \quad 0コ$

32 放物線 $y = x^2 - 3x$ と直線 $y = x + k$ が接するとき、定数 k の値を求めよ。また、そのときの接点の座標を求めよ。

D=0

$x^2 - 3x = x + k$

$x^2 - 4x - k = 0 \quad \text{--- ①}$

$\frac{D}{4} = 4 + k = 0$

$k = -4$

①に代入

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x-2)^2 = 0$

$x = 2 \quad (\text{重解})$

よって

$(2, -2)$

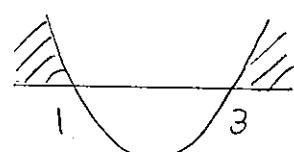
2次関数⑨



【2次不等式】

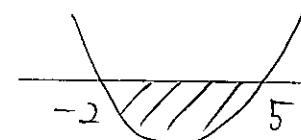
33 次の2次不等式を解け。

(1) $(x-1)(x-3) > 0$



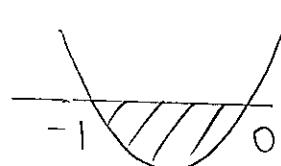
$x < 1, 3 < x$

(2) $(x+2)(x-5) < 0$



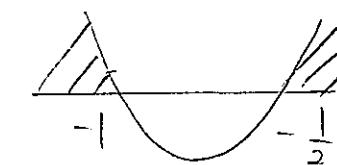
$-2 < x < 5$

(3) $x(x+1) \leq 0$



$-1 \leq x \leq 0$

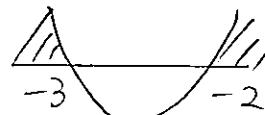
(4) $(2x+1)(x+1) \geq 0$



$x \leq -1, -\frac{1}{2} \leq x$

(5) $x^2 + 5x + 6 > 0$

$(x+3)(x+2) > 0$



$x < -3, -2 < x$

(6) $x^2 \leq 9$

$x^2 - 9 \leq 0$

$(x+3)(x-3) \leq 0$



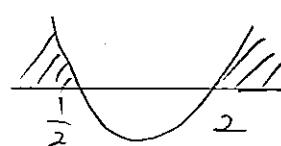
$-3 \leq x \leq 3$

34 次の2次不等式を解け。

(1) $2x^2 - 5x + 2 \geq 0$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 1 \times -1 \\ \hline 1 \quad -2 \quad -4 \\ \hline -5 \end{array}$$

$(2x-1)(x-2) \geq 0$

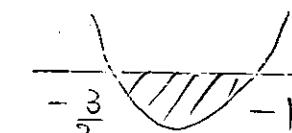


$x \leq \frac{1}{2}, 2 \leq x$

(2) $2x^2 + 5x + 3 < 0$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 1 \times 3 \\ \hline 1 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 5 \end{array}$$

$(2x+3)(x+1) < 0$



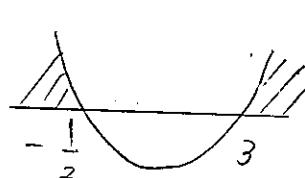
$-\frac{3}{2} < x < -1$

(3) $-2x^2 + 5x + 3 < 0$

$2x^2 - 5x - 3 > 0$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 1 \times 1 \\ \hline 1 \quad -3 \quad -6 \\ \hline -5 \end{array}$$

$(2x+1)(x-3) > 0$

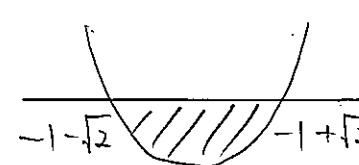


$x < -\frac{1}{2}, 3 < x$

35 次の2次不等式を解け。

(1) $x^2 + 2x - 1 \leq 0$

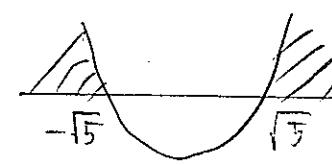
$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 1 &= 0 \\ x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \\ &= -1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$



$-1 - \sqrt{2} \leq x \leq -1 + \sqrt{2}$

(2) $x^2 - 5 > 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 5 &= 0 \\ x^2 &= 5 \\ x &= \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

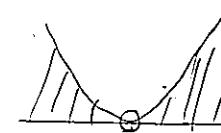


$x < -\sqrt{5}, \sqrt{5} < x$

36 次の2次不等式を解け。

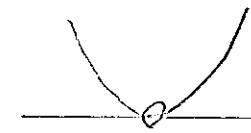
(1) $x^2 - 4x + 4 > 0$

$(x-2)^2 > 0$



(2) $x^2 - 10x + 25 < 0$

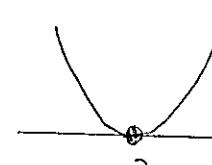
$(x-5)^2 < 0$



解なし

(3) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$

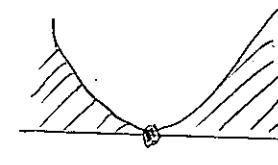
$(x+3)^2 \leq 0$



$x = -3$

(4) $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$

$(2x+1)^2 \geq 0$



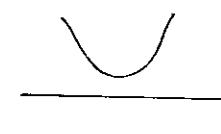
すべての実数

37 次の2次不等式を解け。

(1) $x^2 - 4x + 6 > 0$

$x^2 - 4x + 6 = 0$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-24}}{2}$

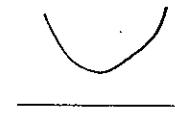


すべての実数

(2) $x^2 - 2x + 2 \leq 0$

$x^2 - 2x + 2 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$

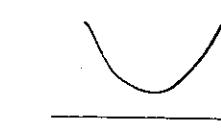


解なし

(3) $2x^2 + 4x + 3 < 0$

$2x^2 + 4x + 3 = 0$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-24}}{4}$

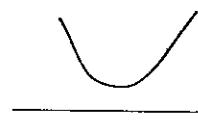


解なし

(4) $2x^2 + 8x + 10 \geq 0$

$2x^2 + 8x + 10 = 0$

$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64-80}}{4}$



すべての実数

2次関数⑩

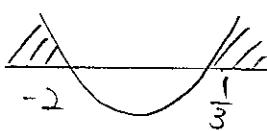


38 次の2次不等式を解け。

$$(1) 3x^2 + 5x - 2 \geq 0$$

$$\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \times \begin{array}{c} -1 \\ 2 \end{array} = \frac{-6}{5}$$

$$(3x-1)(x+2) \geq 0$$



$$x \leq -2, \frac{1}{3} \leq x$$

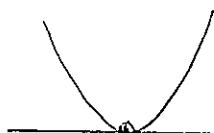
$$(3) 3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 \leq 0$$

$$3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$$

$$x = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12-12}}{6}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

【2次関数のグラフとx軸の共有点】

39 2次関数 $y = 2x^2 + mx + 1$ のグラフがx軸と共有点を持つとき、定数mの値の範囲を求めよ。

$$\Delta = m^2 - 8 \geq 0$$

$$m^2 - 8 = 0$$

$$m^2 = 8$$

$$m = \pm 2\sqrt{2}$$



$$x \leq -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} \leq x$$

【絶対不等式】

40 2次不等式 $x^2 + mx + 3m - 5 > 0$ の解がすべての実数であるとき、定数mの値の範囲を求めよ。

$$\Delta < 0$$

$$m^2 - 4(3m - 5) < 0$$

$$m^2 - 12m + 20 < 0$$

$$(m-2)(m-10) < 0$$

$$2 < m < 10$$

【連立不等式】

41 次の連立不等式を解け。

$$(1) \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{---} \textcircled{1} \\ \text{---} \textcircled{2} \end{array}$$

① より

$$(x-4)(x-1) \leq 0$$

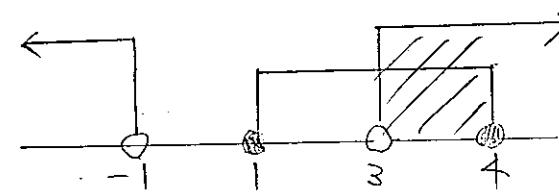
$$1 \leq x \leq 4 \quad \text{---} \textcircled{3}$$

② より

$$(x-3)(x+1) > 0$$

$$x < -1, 3 < x \quad \text{---} \textcircled{4}$$

③ ④ より



$$3 < x \leq 4$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + 3x > 0 \\ x^2 + 4x - 12 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{---} \textcircled{1} \\ \text{---} \textcircled{2} \end{array}$$

① より

$$x(x+3) > 0$$

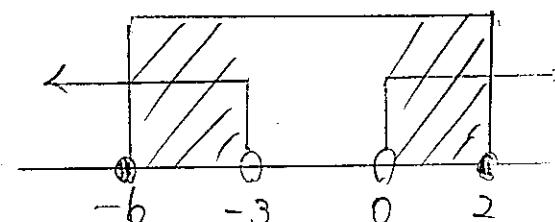
$$x < -3, 0 < x \quad \text{---} \textcircled{3}$$

② より

$$(x+6)(x-2) \leq 0$$

$$-6 \leq x \leq 2 \quad \text{---} \textcircled{4}$$

③ ④ より



$$-6 \leq x < -3, 0 < x \leq 2$$

2次関数⑪



42 次の不等式を解け。

$$\frac{5 < x^2 - 4x \leq 6 - 3x}{\textcircled{1} \quad \textcircled{2}}$$

① エイ

$$x^2 - 4x - 5 > 0$$

$$(x-5)(x+1) > 0$$

$$x < -1, 5 < x \quad \text{--- \textcircled{3}}$$

② エイ

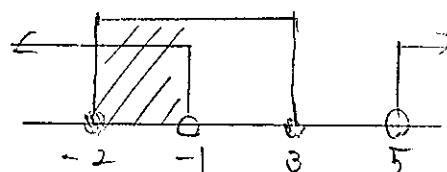
$$x^2 - 4x - 6 + 3x \leq 0$$

$$x^2 - x - 6 \leq 0$$

$$(x-3)(x+2) \leq 0$$

$$-2 \leq x \leq 3 \quad \text{--- \textcircled{4}}$$

③ ④ エイ



$$-2 < x < -1$$

43 周の長さが 16 m で、縦の長さが横の長さ以下の長方形形状の囲いを作る。囲いの中の面積を 12 m²以上にするには、縦の長さをどのような範囲にとればよいか。タテ x ヨコ $8-x$

条件

$$\begin{cases} x > 0 & \text{--- \textcircled{1}} \\ x \leq 8-x & \text{--- \textcircled{2}} \end{cases}$$

② エイ

$$2x \leq 8$$

$$x \leq 4 \quad \text{--- \textcircled{3}}$$

① ③ エイ

$$0 < x \leq 4 \quad \text{--- \textcircled{4}}$$

面積

$$x(8-x) \geq 12$$

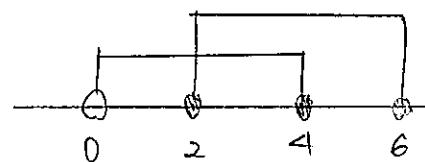
$$8x - x^2 - 12 \geq 0$$

$$x^2 - 8x + 12 \leq 0$$

$$(x-6)(x-2) \leq 0$$

$$2 \leq x \leq 6 \quad \text{--- \textcircled{5}}$$

④ ⑤ エイ

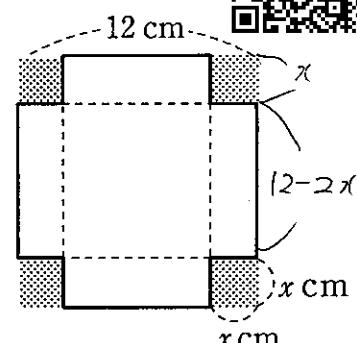


$$2 < x < 4$$

$$2m \text{ 以上 } \pm 4m \text{ 以下}$$

44 1辺が 12 cm の正方形の厚紙がある。この厚紙の四隅

から合同な正方形を切り取り、ふたのない箱を作る。

底面の正方形の1辺を 6 cm 以上で、側面の4個の長方形の面積の和を 40 cm² 以上にするとき、切り取る正方形の1辺の長さをどのような範囲にとればよいか。

x とある

条件

$$\begin{cases} x > 0 & \text{--- \textcircled{1}} \\ 12 - 2x > 6 & \text{--- \textcircled{2}} \end{cases}$$

② エイ

$$-2x > -6$$

$$x < 3 \quad \text{--- \textcircled{3}}$$

$$6x - x^2 \geq 5$$

$$x^2 - 6x + 5 \leq 0$$

$$(x-5)(x-1) \leq 0$$

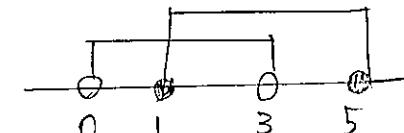
① ③ エイ

$$0 < x < 3 \quad \text{--- \textcircled{4}}$$

$$1 \leq x \leq 5 \quad \text{--- \textcircled{5}}$$

面積

$$(12-2x) \times 4 \times x$$



$$x(12-2x) \times 4 \geq 40$$

$$1 \leq x \leq 3$$

$$12x - 2x^2 \geq 10$$

上, 下

$$1 \text{ cm} \leq x \leq 3 \text{ cm} \text{ 以下}$$

【不等式の解より係数決定】

45 2次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ の解が $-2 < x < 1$ であるように、定数 a, b の値を求めよ。解 バー $-2 < x < 1$ の 2 次不等式は

$$(x-1)(x+2) < 0$$

$$x^2 + x - 2 < 0$$

$$2x^2 + 2x - 4 < 0$$

よって

$$\begin{matrix} \textcircled{-2} \\ a \end{matrix} x^2 \begin{matrix} \textcircled{-2} \\ b \end{matrix} x + 4 > 0 \quad \begin{matrix} a = -2 \\ b = -2 \end{matrix}$$

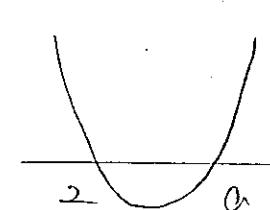
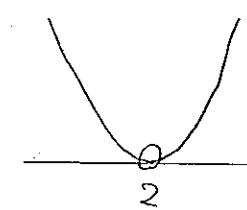
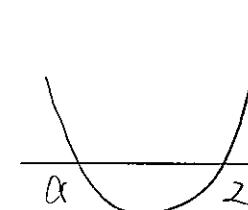
【文字係数の不等式】

46 a を定数とする。次の x についての不等式を解け。

$$x^2 - (a+2)x + 2a < 0$$

$$(x-2)(x-a) < 0$$

$$\textcircled{a} \quad a < 2 \text{ のとき} \quad \textcircled{b} \quad a = 2 \text{ のとき} \quad \textcircled{c} \quad 2 < a \text{ のとき}$$



$$a < x < 2$$

解なし

$$2 < x < a$$



【解の存在範囲】

47 2次方程式 $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ が次のような異なる2つの解をもつとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

(1) ともに正の解

$$f(x) = x^2 - 2mx + m + 2 \quad \text{左辺} <$$

$$(a=1 \quad b=-2m \quad c=m+2)$$

$$\textcircled{1} \frac{D}{4} > 0$$

$$\frac{D}{4} = m^2 - (m+2) > 0$$

$$m^2 - m - 2 > 0$$

$$(m-2)(m+1) > 0$$

$$m < -1, 2 < m$$

$$\textcircled{2} \text{軸} > 0$$

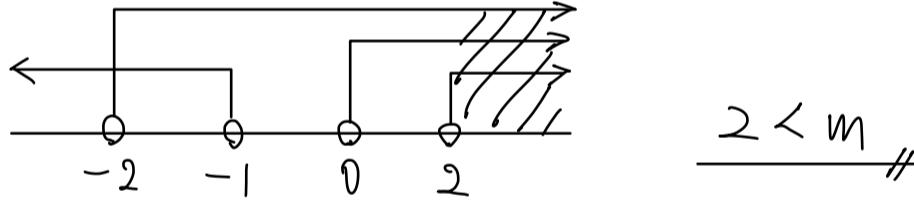
$$\text{軸} = m > 0$$

$$\textcircled{3} f(0) > 0$$

$$f(0) = m + 2 > 0$$

$$m > -2$$

$$\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \text{より}$$



(2) ともに負の解

(1) より

$$\textcircled{1} \frac{D}{4} > 0$$

$$m < -1, 2 < m$$

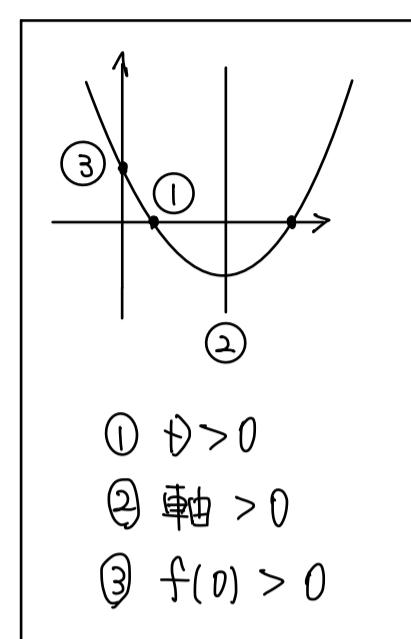
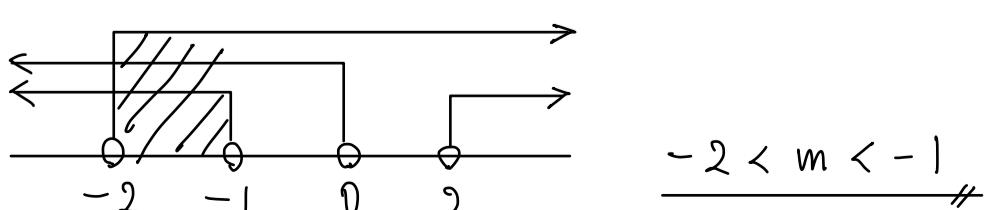
$$\textcircled{2} \text{軸} < 0$$

$$m < 0$$

$$\textcircled{3} f(0) > 0$$

$$m > -2$$

$$\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \text{より}$$



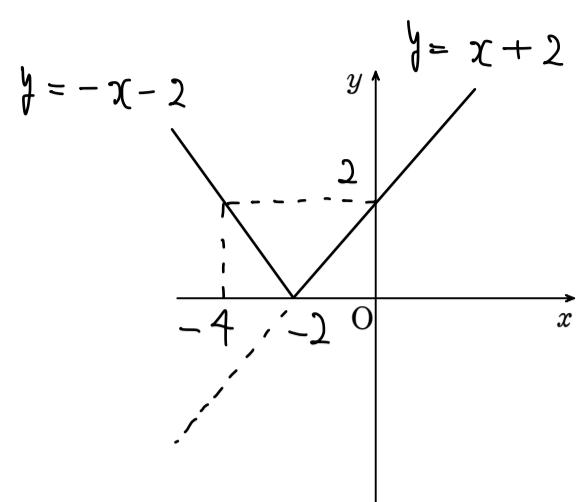
$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$\text{軸} = \frac{-b}{a}$$

【絶対値を含む関数のグラフ】

48 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = |x+2|$



(2) $y = |x^2 - 2x - 3|$

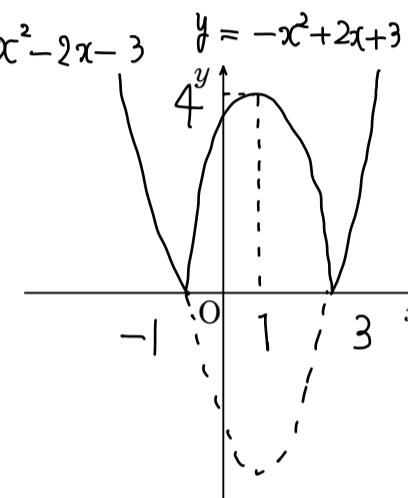
頂点

$$y = x^2 - 2x - 3$$

$$= (x-1)^2 - 1 - 3$$

$$= (x-1)^2 - 4$$

$$\text{頂 } (1, -4)$$



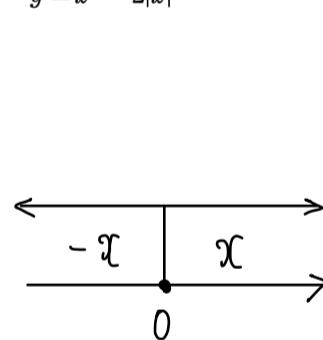
x 軸との交点

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

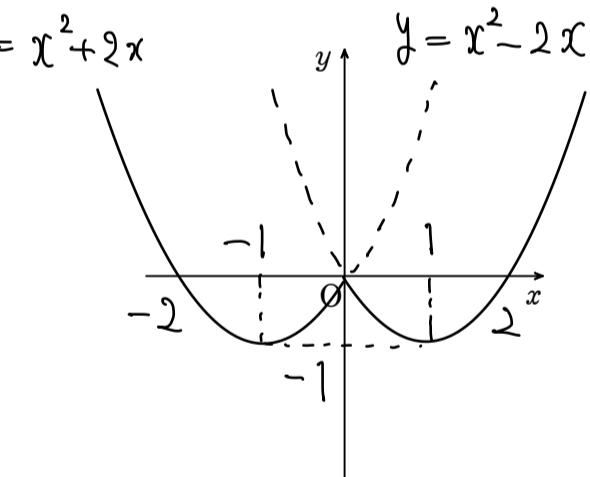
$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x = -1, 3$$

(3) $y = x^2 - 2|x|$



$$y = x^2 + 2x$$



① $x \leq 0$ のとき

$$y = x^2 + 2x$$

$$y = x(x+2)$$

頂点

$$y = x^2 + 2x$$

$$= (x+1)^2 - 1$$

$$\text{頂 } (-1, -1)$$

② $0 \leq x$ のとき

$$y = x^2 - 2x$$

$$y = x(x-2)$$

頂点

$$y = x^2 - 2x$$

$$= (x-1)^2 - 1$$

$$\text{頂 } (1, -1)$$