

対数①

【対数】

① 次の値を求めよ。

$$(1) \log_2 2^5 = \underline{5}$$

$$(2) \log_5 25 = \underline{2}$$

$$(3) \log_3 3 = \underline{1}$$

$$(4) \log_3 1 = \underline{0}$$

$$(5) \log_3 \frac{1}{27} = \underline{-3}$$

$$(6) \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = \underline{4}$$

$$(7) \log_{10} 0.1 = \log_{10} \frac{1}{10} = \underline{-1}$$

$$(8) \log_{\frac{1}{3}} 3 = \underline{-1}$$

$$(9) \log_2 \sqrt[3]{2} = \log_2 2^{\frac{1}{3}} = \underline{\frac{1}{3}}$$

$$(10) \log_{\sqrt{5}} 5 = \underline{2}$$

【対数の計算】

② 次の計算をせよ。

$$(1) \log_4 2 + \log_4 8$$

$$= \log_4 16$$

$$= \underline{2}$$

$$(2) \log_3 2 - \log_3 18$$

$$= \log_3 \frac{1}{9}$$

$$= \underline{-2}$$

$$(3) \log_3 4 + \log_3 18 - 3\log_3 2$$

$$= \log_3 4 + \log_3 18 - \log_3 2^3 = \log_3 12^{\frac{1}{2}} - \log_3 3^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_3 \frac{4 \times 18}{8}$$

$$= \log_3 9$$

$$= \underline{2}$$

$$(4) \log_2 \sqrt[3]{12} - \frac{1}{3} \log_2 3$$

$$= \log_2 \frac{12^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \log_2 \left(\frac{12}{3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \log_2 4^{\frac{1}{3}}$$

$$= \log_2 2^{\frac{2}{3}} = \underline{\frac{2}{3}}$$

【底の変換公式】

③ 次の計算をせよ。次の式を簡単にせよ。

$$(1) \log_4 8$$

$$= \frac{\log_2 8}{\log_2 4}$$

$$= \underline{\frac{3}{2}}$$

$$(2) \log_9 3$$

$$= \frac{\log_3 3}{\log_3 9}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}}$$

$$(3) \log_3 2 \cdot \log_2 27$$

$$= \frac{\log_2 2}{\log_2 3} \cdot \log_2 3^3$$

$$= \frac{1}{\log_2 3} \cdot \frac{3 \log_2 3}{1}$$

$$= \underline{3}$$

$$(4) \log_3 8 \cdot \log_4 3$$

$$= \frac{\log_3 8}{\log_3 3} \cdot \frac{\log_3 3}{\log_3 4}$$

$$= \frac{\log_3 8}{\log_3 4}$$

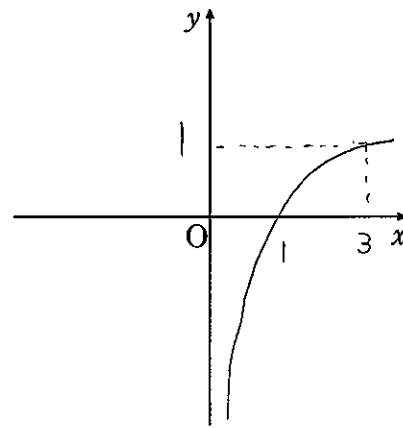
$$= \frac{\log_3 2^3}{\log_3 2^2}$$

$$= \frac{3 \log_3 2}{2 \log_3 2} = \underline{\frac{3}{2}}$$

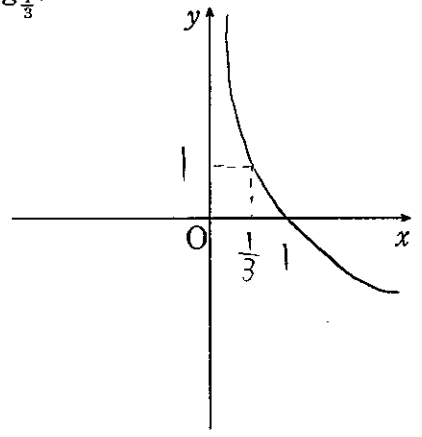
【対数関数のグラフ】

④ 次の関数のグラフをかけ。

$$(1) y = \log_3 x$$



$$(2) y = \log_{\frac{1}{3}} x$$



【対数で表された数の大小比較】

⑤ 次の2つの数の大小を不等号を用いて表せ。

$$(1) 3\log_4 3, 2\log_4 5$$

$$3\log_4 3 = \log_4 3^3 = \log_4 27$$

$$\text{底 } 4 > 1$$

$$2\log_4 5 = \log_4 5^2 = \log_4 25$$

$$\underline{2\log_4 5 < 3\log_4 3}$$

$$(2) \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{4}} 8, \log_{\frac{1}{4}} 3$$

$$\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{4}} 8 = \log_{\frac{1}{4}} 8^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8}$$

$$\text{底 } \frac{1}{4} < 1$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 3 = \log_{\frac{1}{4}} \sqrt{9}$$

$$\underline{\log_{\frac{1}{4}} 3 < \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{4}} 8}$$

$$(3) \log_2 3, 2$$

$$\log_2 3$$

$$\text{底 } 2 > 1$$

$$2 = \log_2 4$$

$$\underline{\log_2 3 < \log_2 4}$$

【対数方程式[1]】

⑥ 次の方程式を解け。

$$(1) \log_2 x = 4$$

$$\text{真数 } x > 0$$

$$\log_2 x = \log_2 16$$

$$\underline{x = 16}$$

$$(2) \log_{\frac{1}{2}} x = 0$$

$$\text{真数 } x > 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 1$$

$$\underline{x = 1}$$

$$(3) \log_3(x+1) = 2$$

$$\text{真数 } x+1 > 0$$

$$x > -1$$

$$\log_3(x+1) = \log_3 9$$

$$x+1 = 9$$

$$\underline{x = 8}$$

$$(4) \log_2 x = \log_{\frac{1}{2}} 5$$

$$\text{真数 } x > 0$$

$$\log_2 x = \frac{\log_2 5}{\log_2 \frac{1}{2}}$$

$$\log_2 x = -\log_2 5$$

$$\log_2 x = \log_2 5^{-1}$$

$$\underline{x = \frac{1}{5}}$$

対数②

【対数不等式[1]】

7 次の不等式を解け。

(1) $\log_3 x < 1$

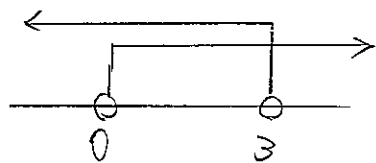
真数 $x > 0$ — ①

$$\log_3 x < \log_3 3$$

底 $3 > 1$

$$x < 3 \quad \text{--- ②}$$

①②より



$$0 < x < 3$$

(2) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > 1$

真数 $x-1 > 0$

$$x > 1 \quad \text{--- ①}$$

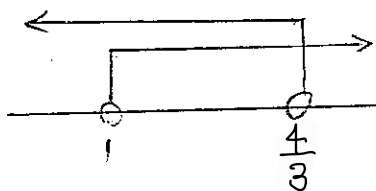
$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$$

底 $\frac{1}{3} < 1$

$$x-1 < \frac{1}{3}$$

$$x < \frac{4}{3} \quad \text{--- ②}$$

①②より



$$1 < x < \frac{4}{3}$$

【対数方程式[2]】

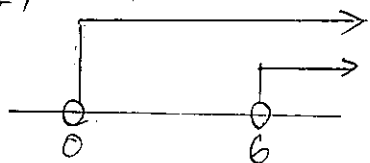
8 次の方程式を解け。

(1) $\log_4 x + \log_2(x-6) = 2$

真数 $x > 0$, $x-6 > 0$

$$x > 6 \quad \text{--- ②}$$

①②より



$$x > 6 \quad \text{--- ③}$$

$$\log_4 x + \log_4(x-6) = 2$$

$$\log_4 x + \log_4(x-6) = \log_4 16$$

$$x(x-6) = 16$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$(x-8)(x+2) = 0$$

$$x = \cancel{-2}, 8$$

③より

よって

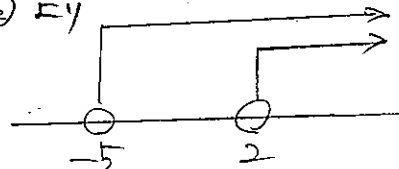
$$x = 8$$

(2) $\log_2(x+5) + \log_2(x-2) = 3$

真数 $x+5 > 0$, $x-2 > 0$

$$x > -5 \quad x > 2 \quad \text{--- ②}$$

①②より



$$x > 2 \quad \text{--- ③}$$

$$\log_2(x+5) + \log_2(x-2) = \log_2 8$$

$$(x+5)(x-2) = 8$$

$$x^2 + 3x - 10 = 8$$

$$x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$(x+6)(x-3) = 0$$

$$x = \cancel{-6}, 3$$

③より

よって

$$x = 3$$

【対数不等式[2]】

9 次の不等式を解け。

(1) $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) \leq \log_{\frac{1}{3}} x$

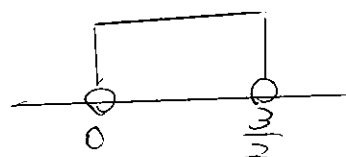
真数 $3-2x > 0$

$$x > 0 \quad \text{--- ②}$$

$$2x < 3$$

$$x < \frac{3}{2} \quad \text{--- ①}$$

①②より



$$0 < x < \frac{3}{2} \quad \text{--- ③}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) \leq \log_{\frac{1}{3}} x$$

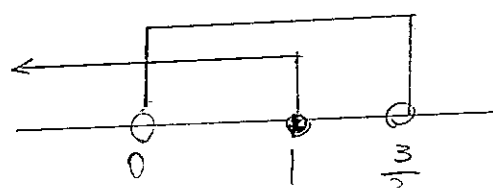
底 $\frac{1}{3} < 1$

$$3-2x \geq x$$

$$3x \leq 3$$

$$x \leq 1 \quad \text{--- ④}$$

③④より



$$0 < x \leq 1$$

対数③

(2) $2\log_3(2-x) < \log_3(x+4)$

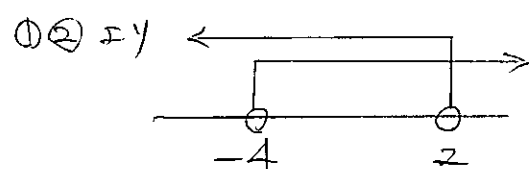
真数 $2-x > 0$, $x+4 > 0$

$x < 2$

$x > -4$

①

②



$-4 < x < 2$ ③

$2\log_3(2-x) < \log_3(x+4)$

$\log_3(2-x)^2 < \log_3(x+4)$

底 $3 > 1$

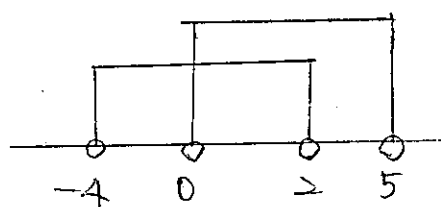
$4-4x+x^2 < x+4$

$x^2-5x < 0$

$x(x-5) < 0$

$0 < x < 5$ ④

③④より



$0 < x < 2$

【対数方程式・不等式[3]】

10 次の方程式、不等式を解け。

(1) $(\log_3 x)^2 - \log_3 x^4 = 0$

真数 $x > 0$, $x^4 > 0$

① $x > 0$

②

③④より $x > 0$

$(\log_3 x)^2 - \log_3 x^4 = 0$

$(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x = 0$

$\log_3 x = t$ とおく

$t^2 - 4t = 0$

$t(t-4) = 0$

$t = 0, 4$

$t = 0$ のとき

$t = 4$ のとき

$\log_3 x = 0$

$\log_3 x = 4$

$x = 1$

$\log_3 x = \log_3 81$

$x = 81$

$x = 1, 81$

(2) $(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 \geq 0$

真数 $x > 0$ ①

$(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 \geq 0$

$\log_3 x = t$ とおく

$t^2 - t - 2 \geq 0$

$(t-2)(t+1) \geq 0$

$t \leq -1, 2 \leq t$

$t \leq -1$ のとき

$2 \leq t$ のとき

$\log_3 x \leq -1$

$2 \leq \log_3 x$

$\log_3 x \leq \log_3 \frac{1}{3}$

$\log_3 9 \leq \log_3 x$

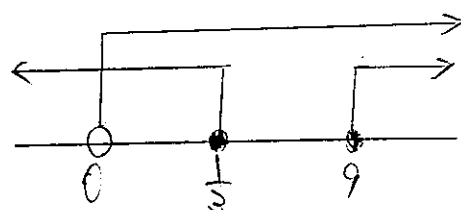
底 $3 > 1$

底 $3 > 1$

$x \leq \frac{1}{3}$ ②

$9 \leq x$ ③

①②③より



$0 < x \leq \frac{1}{3}$

$9 \leq x$

【対数の表示】

11 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ とするとき、次の値を a , b を用いて表せ。

(1) $\log_{10} 12$

(2) $\log_{10} \frac{8}{9}$

$= \log_{10} (4 \times 3)$

$= \log_{10} 8 - \log_{10} 9$

$= \log_{10} 4 + \log_{10} 3$

$= \log_{10} 2^3 - \log_{10} 3^2$

$= \log_{10} 2^2 + \log_{10} 3$

$= 3\log_{10} 2 - 2\log_{10} 3$

$= 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3$

$= 3a - 2b$

$= 2a + b$

(3) $\log_{10} 5$

(4) $\log_4 3$

$= \log_{10} \frac{10}{2}$

$= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 4}$

$= \log_{10} 10 - \log_{10} 2$

$= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2^2}$

$= 1 - a$

$= \frac{\log_{10} 3}{2\log_{10} 2} = \frac{b}{2a}$

対数④

【対数関数の最大・最小】

12 $1 \leq x \leq 16$ のとき、関数 $y = (\log_2 x)^2 - \log_2 x^2$ の最大値と最小値を求めよ。

$$y = (\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x$$

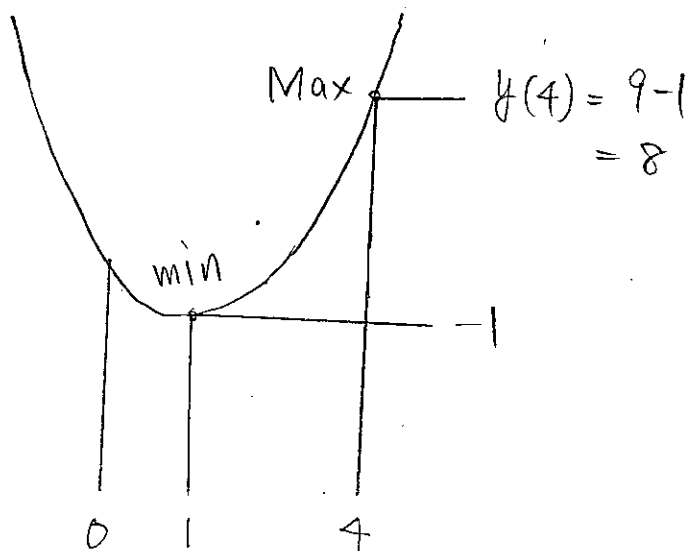
$$\log_2 x = t \text{ とおく}$$

$$y = t^2 - 2t$$

$$= (t-1)^2 - 1$$

頂点 $(1, -1)$

$$\left(\begin{array}{l} 1 \leq x \leq 16 \\ \downarrow \\ \log_2 1 \leq \log_2 x \leq \log_2 16 \\ \downarrow \\ 0 \leq t \leq 4 \end{array} \right)$$



Max 8 ($t=4$)
min -1 ($t=1$)

$t=4$ のとき

$$\log_2 x = 4$$

$$\log_2 x = \log_2 16$$

$$x = 16$$

$t=1$ のとき

$$\log_2 x = 1$$

$$\log_2 x = \log_2 2$$

$$x = 2$$

よって

Max 8 ($x=16$)

min -1 ($x=2$)

【桁数】

13 2^{20} は何桁の数か。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

$$\log_{10} 2^{20} = 20 \log_{10} 2$$

$$= 20 \times 0.3010$$

$$= 6.02$$

$$6 < \log_{10} 2^{20} < 7$$

$$10^6 < 2^{20} < 10^7$$

よって

$$\underline{7 \text{ 桁}}$$

【小数首位】

14 $\left(\frac{4}{5}\right)^{100}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

$$\log_{10} \left(\frac{4}{5}\right)^{100} = 100 \log_{10} \left(\frac{4}{5}\right)$$

$$= 100 \log_{10} \left(\frac{8}{10}\right)$$

$$= 100 (\log_{10} 8 - \log_{10} 10)$$

$$= 100 (\log_{10} 2^3 - 1)$$

$$= 100 (3 \log_{10} 2 - 1)$$

$$= 100 (3 \times 0.3010 - 1)$$

$$= 100 \times (-0.097)$$

$$= -9.7$$

$$-10 < -9.7 < -9$$

$$-10 < \log_{10} \left(\frac{4}{5}\right)^{100} < -9$$

$$10^{-10} < \left(\frac{4}{5}\right)^{100} < 10^{-9}$$

よって

小数第 10 位

【桁数[2]】

15 3^n が 8 桁の数となるような自然数 n をすべて求めよ。ただし、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

$$10^7 \leq 3^n < 10^8$$

$$\log_{10} 10^7 \leq \log_{10} 3^n < \log_{10} 10^8$$

$$7 \leq n \log_{10} 3 < 8$$

$$\frac{7}{\log_{10} 3} \leq n < \frac{8}{\log_{10} 3}$$

$$\frac{7}{0.4771} \leq n < \frac{8}{0.4771}$$

$$\begin{array}{r} 14.6 \\ 0.4771 \overline{) 70000} \\ \underline{4771} \\ 22290 \\ \underline{19084} \\ 32060 \\ \underline{28626} \\ 3434 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16.7 \\ 0.4771 \overline{) 80000} \\ \underline{4771} \\ 32290 \\ \underline{28626} \\ 36640 \\ \underline{33397} \\ 3243 \end{array}$$

$$14.6 \leq n < 16.7$$

よって $\underline{n = 15, 16}$