【指数法則】

1 次の計算をせよ。ただし，$a \neq 0$ とする。

(1) $a^5 \times a^4 = a^9$

(2) $a^6 \div a^3 = a^3$

(3) $(2a^2)^4 = 16a^8$

(4) $3^2 \div 3^{-1} = 3^3 = 27$

(5) $a^5 \times a^{-2} \div a^{-3}$
$= a^{5-2+3}$
$= a^6$

(6) $3^5 \times 9^{-4} \div 27^{-2}$
$= 3^5 \times 3^{-8} \div 3^{-6}$
$= 3^{5-8+6}$
$= 3^3$
$= 27$

(7) $12^3 \times 2^{-4}$
$= (2^2 \times 3)^3 \times 2^{-4}$
$= 2^6 \times 3^3 \times 2^{-4}$
$= 2^2 \times 3^3$
$= 108$

【累乗根の性質】

2 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt[4]{16} = 2$

(2) $\sqrt[3]{27} = 3$

(3) $\sqrt[3]{-27} = -3$

(4) $\sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5^2 \times 5}$
$= 5$

(5) $(\sqrt[3]{3})^9 = (\sqrt[3]{3^9})$
$= 27$

(6) $\dfrac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{8}$
$= 2$

(7) $\sqrt[4]{\sqrt{256}} = \sqrt[8]{256}$
$= 2$

【累乗根の計算】

3 次の式を計算せよ。

(1) $8^{\frac{2}{3}} \times 4^{\frac{3}{2}}$
$= 2^2 \times 2^3$
$= 2^5$
$= 32$

(2) $2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{6}} \div 2^{\frac{1}{3}}$
$= 2^{-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}$
$= 2^0$
$= 1$

(3) $(3^{-2} \times 9^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$
$= (3^{-2} \times 3^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}}$
$= (3^{-2+\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}}$
$= (3^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$
$= 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$

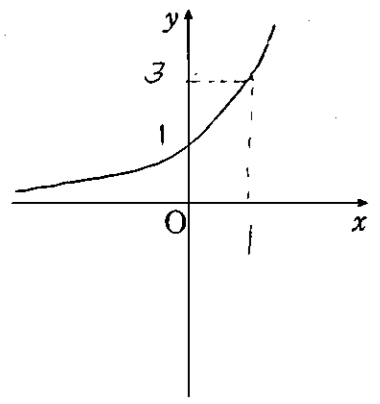
(4) $\sqrt[3]{5} \div \sqrt[12]{5} \times \sqrt[4]{5}$
$= 5^{\frac{1}{3}} \div 5^{\frac{1}{12}} \times 5^{\frac{1}{4}}$
$= 5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}}$
$= 5^{\frac{1}{2}}$
$= \sqrt{5}$

(5) $\sqrt{6} \times \sqrt[4]{54} \div \sqrt[4]{6}$
$= 6^{\frac{1}{2}} \times 54^{\frac{1}{4}} \div 6^{\frac{1}{4}}$
$= (2 \times 3)^{\frac{1}{2}} \times (2 \times 3^3)^{\frac{1}{4}} \times (2 \times 3)^{-\frac{1}{4}}$
$= 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{3}{4}} \times 2^{-\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{4}}$
$= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}$
$= 2^{\frac{1}{2}} \times 3$
$= 3\sqrt{2}$

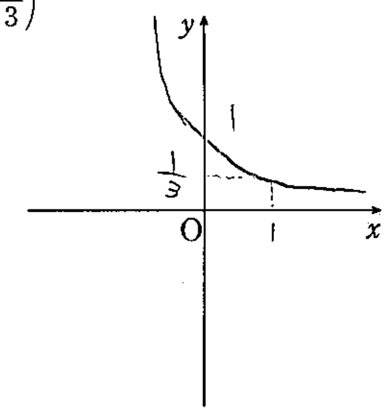
【指数関数のグラフ】

4 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=3^x$



(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$



【累乗根で表された数の大小比較[1]】

5 次の3つの数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{9}$，$\sqrt[4]{27}$

$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{6}{12}}$

$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{8}{12}}$

$\sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3^3} = 3^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{9}{12}}$

底 $3 > 1$

$\sqrt{3} < \sqrt[3]{9} < \sqrt[4]{27}$

(2) $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$，$\sqrt[5]{\frac{1}{27}}$，1

$\sqrt[3]{\frac{1}{9}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{10}{15}}$

$\sqrt[5]{\frac{1}{27}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{5}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{9}{15}}$

$1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$

底 $\frac{1}{3} < 1$

$\sqrt[3]{\frac{1}{9}} < \sqrt[5]{\frac{1}{27}} < 1$

【累乗根で表された数の大小比較[2]】

6 次の2つの数 $\sqrt[3]{5}$，$\sqrt[4]{7}$ の大小を不等号を用いて表せ。

$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \longrightarrow (5^{\frac{1}{3}})^{12} = 5^4 = 625$

$\sqrt[4]{7} = 7^{\frac{1}{4}} \qquad (7^{\frac{1}{4}})^{12} = 7^3 = 343$

よって $\sqrt[4]{7} < \sqrt[3]{5}$

【指数方程式[1]】

7 次の方程式を解け。

(1) $5^x=125$
$5^x = 5^3$
$x = 3$

(2) $8^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$
$2^{3x} = 2^{-x+4}$
$3x = -x+4$
$4x = 4$
$x = 1$

(3) $(\sqrt{3})^x=9^{1-x}$
$3^{\frac{1}{2}x} = 3^{2-2x}$
$\frac{1}{2}x = 2-2x$
$\frac{5}{2}x = 2$
$x = \dfrac{4}{5}$

【指数不等式[1]】

8 次の不等式を解け。

(1) $3^x \leqq 27$

$3^x \leqq 3^3$

底 $3 > 1$

$x \leqq 3$

(2) $2^{x+1} > 8$

$2^{x+1} > 2^3$

底 $2 > 1$

$x+1 > 3$

$x > 2$

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} > \frac{1}{81}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} > \left(\frac{1}{3}\right)^4$

底 $\frac{1}{3} < 1$

$2x-1 < 4$

$2x < 5$

$x < \frac{5}{2}$

【指数方程式[2]】

9 次の方程式を解け。

(1) $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$

$(2^x)^2 + 2\cdot 2^x - 3 = 0$

$2^x = t$ とおく $(t>0)$ ①

$t^2 + 2t - 3 = 0$

$(t+3)(t-1) = 0$

$t = \cancel{3},\ 1$

①より

$t = 1$ のとき

$2^x = 1$

$2^x = 2^0$

$x = 0$

(2) $9^x - 4\cdot 3^x + 3 = 0$

$(3^x)^2 - 4\cdot 3^x + 3 = 0$

$3^x = t$ とおく $(t>0)$

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$(t-3)(t-1) = 0$

$t = 1,\ 3$

$t = 1$ のとき

$3^x = 1$

$3^x = 3^0$

$x = 0$

$t = 3$ のとき

$3^x = 3^1$

$x = 1$

よって

$x = 0,\ 1$

【指数不等式[2]】

10 次の不等式を解け。

(1) $9^x + 3^x - 12 > 0$

$(3^x)^2 + 3^x - 12 > 0$

$3^x = t$ とおく $(t>0)$ ①

$t^2 + t - 12 > 0$

$(t+4)(t-3) > 0$

①より

$t - 3 > 0$

$t > 3$

$3^x > 3^1$

$x > 1$

(2) $9^x - 4\cdot 3^x + 3 \leqq 0$

$(3^x)^2 - 4\cdot 3^x + 3 \leqq 0$

$3^x = t$ とおく $(t>0)$

$t^2 - 4t + 3 \leqq 0$

$(t-3)(t-1) \leqq 0$

$1 \leqq t \leqq 3$

$1 \leqq 3^x \leqq 3$

$3^0 \leqq 3^x \leqq 3^1$

$0 \leqq x \leqq 1$

【指数方程式の最大･最小】

11 関数 $y = 4^x - 2^{x+1} + 2$ $(x \leqq 2)$ の最大値，最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$y = (2^x)^2 - 2\cdot 2^x + 2$

$2^x = t$ とおく $(t>0)$ ①

$y = t^2 - 2t + 2$

$= (t-1)^2 - 1 + 2$

$= (t-1)^2 + 1$

$x \leqq 2$

$\downarrow$

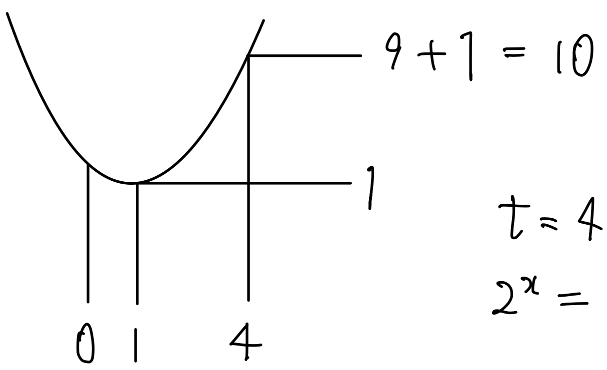
$2^x \leqq 2^2$

$\downarrow$

$t \leqq 4$ ②

①②より

$0 < t \leqq 4$



$t = 4$ のとき

$2^x = 2^2$

$x = 2$

$t = 1$ のとき

$2^x = 2^0$

$x = 0$

Max 10 $(t=4)$

min 1 $(t=1)$

Max 10 $(x=2)$

min 1 $(x=0)$