対数①

【対数】

1 次の値を求めよ。

(1) $\log_2 2^5 = 5$

(2) $\log_5 25 = 2$

(3) $\log_3 3 = 1$

(4) $\log_3 1 = 0$

(5) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

(6) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$

(7) $\log_{10} 0.1 = \log_{10} \frac{1}{10} = -1$

(8) $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$

(9) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \log_2 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

(10) $\log_{\sqrt{5}} 5 = 2$

【対数の計算】

2 次の計算をせよ。

(1) $\log_4 2 + \log_4 8$

$= \log_4 16$

$= 2$

(2) $\log_3 2 - \log_3 18$

$= \log_3 \frac{1}{9}$

$= -2$

(3) $\log_3 4 + \log_3 18 - 3\log_3 2$

$= \log_3 4 + \log_3 18 - \log_3 2^3$

$= \log_3 \frac{4 \times 18}{8}$

$= \log_3 9$

$= 2$

(4) $\log_2 \sqrt[3]{12} - \frac{1}{3}\log_2 3$

$= \log_2 12^{\frac{1}{3}} - \log_2 3^{\frac{1}{3}}$

$= \log_2 \frac{12^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}$

$= \log_2 \left(\frac{12}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= \log_2 4^{\frac{1}{3}}$

$= \log_2 2^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

【底の変換公式】

3 次の計算をせよ。次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_4 8$

$= \frac{\log_2 8}{\log_2 4}$

$= \frac{3}{2}$

(2) $\log_9 3$

$= \frac{\log_3 3}{\log_3 9}$

$= \frac{1}{2}$

(3) $\log_3 2 \cdot \log_2 27$

$= \frac{\log_2 2}{\log_2 3} \cdot \log_2 3^3$

$= \frac{1}{\log_2 3} \cdot \frac{3\log_2 3}{1}$

$= 3$

(4) $\log_3 8 \cdot \log_4 3$

$= \frac{\log_3 8}{\log_3 3} \cdot \frac{\log_3 3}{\log_3 4}$

$= \frac{\log_3 8}{\log_3 4}$

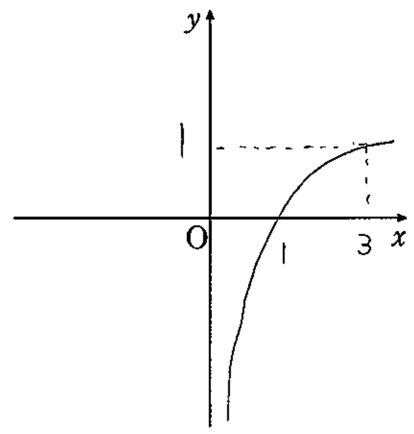
$= \frac{\log_3 2^3}{\log_3 2^2}$

$= \frac{3\log_3 2}{2\log_3 2} = \frac{3}{2}$

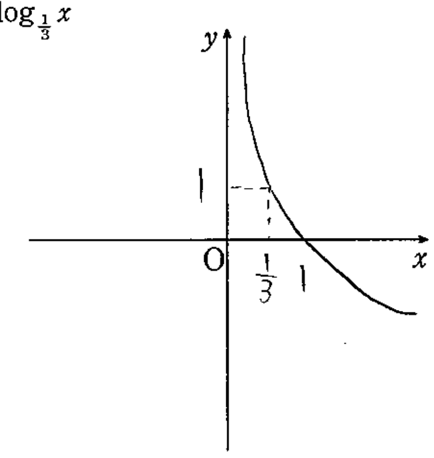
【対数関数のグラフ】

4 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = \log_3 x$



(2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$



【対数で表された数の大小比較】

5 次の２つの数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $3\log_4 3$, $2\log_4 5$

$3\log_4 3 = \log_4 3^3 = \log_4 27$

$2\log_4 5 = \log_4 5^2 = \log_4 25$

底 $4 > 1$

$2\log_4 5 < 3\log_4 3$

(2) $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} 8$, $\log_{\frac{1}{4}} 3$

$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} 8 = \log_{\frac{1}{4}} 8^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8}$

$\log_{\frac{1}{4}} 3 = \log_{\frac{1}{4}} \sqrt{9}$

底 $\frac{1}{4} < 1$

$\log_{\frac{1}{4}} 3 < \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} 8$

(3) $\log_2 3$, 2

$\log_2 3$

$2 = \log_2 4$

底 $2 > 1$

$\log_2 3 < \log_2 4$

【対数方程式[1]】

6 次の方程式を解け。

(1) $\log_2 x = 4$

真数 $x > 0$

$\log_2 x = \log_2 16$

$x = 16$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 0$

真数 $x > 0$

$\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 1$

$x = 1$

(3) $\log_3(x+1) = 2$

真数 $x + 1 > 0$

$x > -1$

$\log_3(x+1) = \log_3 9$

$x + 1 = 9$

$x = 8$

(4) $\log_2 x = \log_{\frac{1}{2}} 5$

真数 $x > 0$

$\log_2 x = \frac{\log_2 5}{\log_2 \frac{1}{2}}$

$\log_2 x = -\log_2 5$

$\log_2 x = \log_2 5^{-1}$

$x = \frac{1}{5}$

【対数不等式[1]】

$\boxed{7}$ 次の不等式を解け。

(1) $\log_3 x < 1$

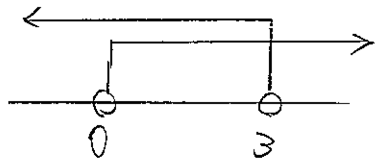
真数 $x > 0$ —①

$\log_3 x < \log_3 3$

底 $3 > 1$

$x < 3$ —②

①②より



$0 < x < 3$ //

(2) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > 1$

真数 $x-1 > 0$

$x > 1$ —①

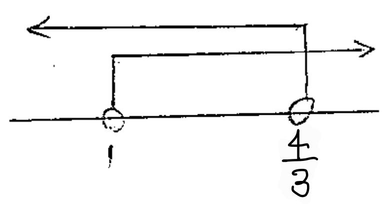
$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$

底 $\frac{1}{3} < 1$

$x-1 < \frac{1}{3}$

$x < \frac{4}{3}$ —②

①②より



$1 < x < \frac{4}{3}$ //

【対数方程式[2]】

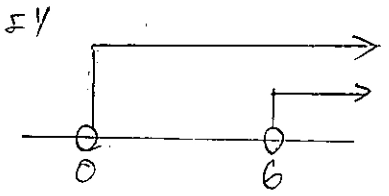
$\boxed{8}$ 次の方程式を解け。

(1) $\log_4 x + \log_2(x-6) = 2$

真数 $x > 0$ —①, $x-6 >$

$x > 6$ —②

①②より



$x > 6$ —③

$\log_4 x + \log_4(x-6) = 2$

$\log_4 x + \log_4(x-6) = \log_4 16$

$x(x-6) = 16$

$x^2 - 6x - 16 = 0$

$(x-8)(x+2) = 0$

$x = \cancel{-2}, 8$

③より

よって

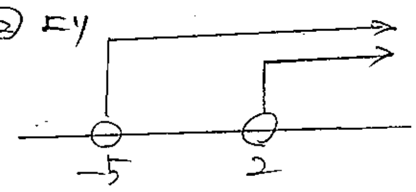
$x = 8$ //

(2) $\log_2(x+5) + \log_2(x-2) = 3$

真数 $x+5 > 0$, $x-2 > 0$

$x > -5$ —①　$x > 2$ —②

①②より



$2 < x$ —③

$\log_2(x+5) + \log_2(x-2) = \log_2 8$

$(x+5)(x-2) = 8$

$x^2 + 3x - 10 = 8$

$x^2 + 3x - 18 = 0$

$(x+6)(x-3) = 0$

$x = \cancel{-6}, 3$

③より

よって

$x = 3$ //

【対数不等式[2]】

$\boxed{9}$ 次の不等式を解け。

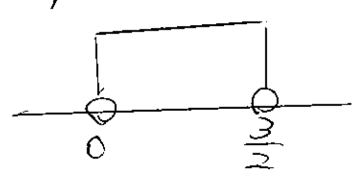
(1) $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) \leqq \log_{\frac{1}{3}} x$

真数 $3-2x > 0$　$x > 0$ —②

$2x < 3$

$x < \frac{3}{2}$ —①

①②より



$0 < x < \frac{3}{2}$ —③

$\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) \leqq \log_{\frac{1}{3}} x$

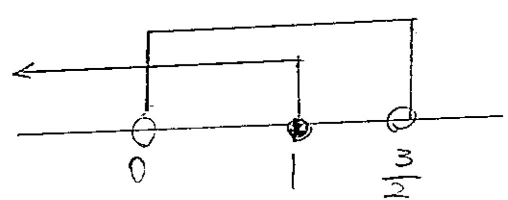
底 $\frac{1}{3} < 1$

$3-2x \geqq x$

$3x \leqq 3$

$x \leqq 1$ —④

③④より



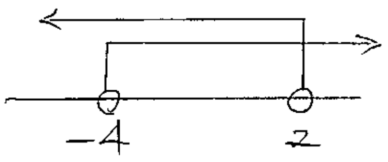
$0 < x \leqq 1$ //

(2) $2\log_3(2-x)<\log_3(x+4)$

真数 $2-x>0$, $x+4>0$

$x<2$ —① $x>-4$ —②

①②より



$-4<x<2$ ——③

$2\log_3(2-x)<\log_3(x+4)$

$\log_3(2-x)^2<\log_3(x+4)$

底 $3>1$

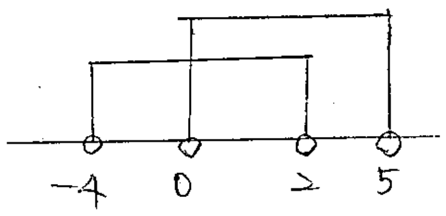
$4-4x+x^2<x+4$

$x^2-5x<0$

$x(x-5)<0$

$0<x<5$ ——④

③④より



$\underline{0<x<2}$ //

【対数方程式・不等式[3]】

$\boxed{10}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1) $(\log_3 x)^2-\log_3 x^4=0$

真数 $x>0$, $x^2>0$

—① —②

①②より $x>0$

$(\log_3 x)^2-\log_3 x^2-3=0$

$(\log_3 x)^2-2\log_3 x-3=0$

$\log_3 x=t$ とおく

$t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$

$t=-1, 3$

$t=-1$ のとき

$\log_3 x=-1$

$x=\frac{1}{3}$

$t=3$ のとき

$\log_3 x=3$

$\log_3 x=\log_3 27$

$x=27$

よって $\underline{x=\frac{1}{3}, 27}$ //

(2) $(\log_3 x)^2-\log_3 x-2\geqq 0$

真数 $x>0$ ——①

$(\log_3 x)^2-\log_3 x-2\geqq 0$

$\log_3 x=t$ とおく

$t^2-t-2\geqq 0$

$(t-2)(t+1)\geqq 0$

$t\leqq -1,\ 2\leqq t$

$t\leqq -1$ のとき

$\log_3 x\leqq -1$

$\log_3 x\leqq \log_3\frac{1}{3}$

底 $3>1$

$x\leqq\frac{1}{3}$ —②

$2\leqq t$ のとき

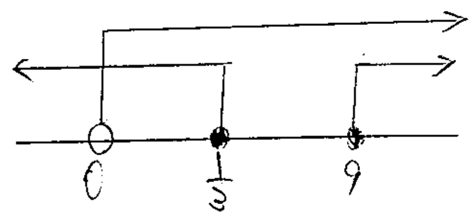
$2\leqq\log_3 x$

$\log_3 9\leqq\log_3 x$

底 $3>1$

$9\leqq x$ —③

①②③より



$0<x\leqq\frac{1}{3}$

$\underline{9\leqq x}$ //

【対数の表示】

$\boxed{11}$ $\log_{10}2=a$, $\log_{10}3=b$ とするとき，次の値を a, b を用いて表せ。

(1) $\log_{10}12$

$=\log_{10}(4\times 3)$

$=\log_{10}4+\log_{10}3$

$=\log_{10}2^2+\log_{10}3$

$=2\log_{10}2+\log_{10}3$

$=\underline{2a+b}$ //

(2) $\log_{10}\frac{8}{9}$

$=\log_{10}8-\log_{10}9$

$=\log_{10}2^3-\log_{10}3^2$

$=3\log_{10}2-2\log_{10}3$

$=\underline{3a-2b}$ //

(3) $\log_{10}5$

$=\log_{10}\frac{10}{2}$

$=\log_{10}10-\log_{10}2$

$=\underline{1-a}$ //

(4) $\log_4 3$

$=\frac{\log_{10}3}{\log_{10}4}$

$=\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2^2}$

$=\frac{\log_{10}3}{2\log_{10}2}=\underline{\frac{b}{2a}}$ //

【対数関数の最大・最小】

12 $1 \leqq x \leqq 16$ のとき、関数 $y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^2$ の最大値と最小値を求めよ。

$y=(\log_2 x)^2-2\log_2 x$

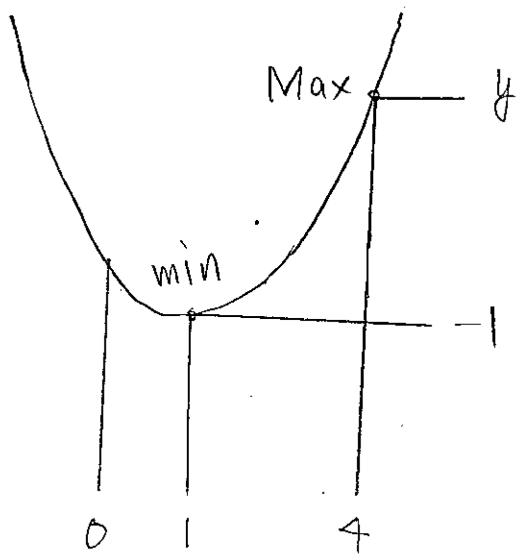
$\log_2 x = t$ とおく

$y=t^2-2t$

$=(t-1)^2-1$

頂 $(1,-1)$

$$\left(\begin{array}{c} 1 \leqq x \leqq 16 \\ \downarrow \\ \log_2 1 \leqq \log_2 x \leqq \log_2 16 \\ \downarrow \\ 0 \leqq t \leqq 4 \end{array}\right)$$



$y(4)=9-1$
$=8$

Max 8 $(t=4)$
min -1 $(t=1)$

$t=4$ のとき

$\log_2 x = 4$

$\log_2 x = \log_2 16$

$x=16$

$t=1$ のとき

$\log_2 x = 1$

$\log_2 x = \log_2 2$

$x=2$

よって

Max 8 $(x=16)$
min -1 $(x=2)$ //

【桁数】

13 2^{20} は何桁の数か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

$$\begin{array}{r} 0.3010 \\ \times\ 20 \\ \hline 6.0200 \end{array}$$

$\log_{10}2^{20} = 20\log_{10}2$

$= 20 \times 0.3010$

$= 6.02$

$6 < \log_{10}2^{20} < 7$

$10^6 < 2^{20} < 10^7$

よって　7桁 //

【小数首位】

14 $\left(\frac{4}{5}\right)^{100}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

$$\begin{array}{r} 0.903 \\ \hline 0.097 \end{array}$$

$\log_{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{100} = 100\log_{10}\left(\frac{4}{5}\right)$

$=100\log_{10}\left(\frac{8}{10}\right)$

$=100(\log_{10}8-\log_{10}10)$

$=100(\log_{10}2^3-1)$

$=100(3\log_{10}2-1)$

$=100(3\times 0.3010-1)$

$=100\times(-0.097)$

$=-9.7$

$-10<-9.7<-9$

$-10<\log_{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{100}<-9$

$10^{-10}<\left(\frac{4}{5}\right)^{100}<10^{-9}$

よって　小数第10位 //

【桁数[2]】

15 3^n が 8 桁の数となるような自然数 n をすべて求めよ。ただし，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

$10^7 \leqq 3^n < 10^8$

$\log_{10}10^7 \leqq \log_{10}3^n < \log_{10}10^8$

$7 \leqq n\log_{10}3 < 8$

$\frac{7}{\log_{10}3} \leqq n < \frac{8}{\log_{10}3}$

$\frac{7}{0.4771} \leqq n < \frac{8}{0.4771}$

$$\begin{array}{r} 14.6 \\ 0.4771\,\overline{)\,70000} \\ 4771 \\ \hline 22290 \\ 19084 \\ \hline 32060 \\ 28626 \\ \hline 3434 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16.7 \\ 0.4771\,\overline{)\,80000} \\ 4771 \\ \hline 32290 \\ 28626 \\ \hline 36640 \\ 33397 \\ \hline 3243 \end{array}$$

$14.6 \leqq n < 16.7$

よって　$n=15,\ 16$ //