【不定積分[1]】

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(x^3-6x^2-2x+5)dx = \frac{1}{4}x^4-2x^3-x^2+5x+C$

(2) $\int(x+1)(x-3)dx = \int(x^2-2x-3)dx$

$= \frac{1}{3}x^3-x^2-3x+C$

(3) $\int 3(t-1)^2dt = \int 3(t^2-2t+1)dt$

$= \int(3t^2-6t+3)dt$

$= t^3-3t^2+3t+C$

【不定積分の関数の決定】

$\boxed{2}$ 次の２つの条件をともに満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

[1] $F'(x)=3x^2-4$　　[2] $F(1)=2$

$F(x)=\int(3x^2-4)dx$

$F(x)=x^3-4x+C$

$F(1)=2$ より

$F(1)=1-4+C$

$=-3+C$

$-3+C=2$

$C=5$

よって　$F(x)=x^3-4x+5$

【定積分の値[1]】

$\boxed{3}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^2 5dx$

$=5\int_0^2 dx$

$=5\left[x\right]_0^2$

$=5(2-0)$

$=10$

(2) $\int_0^2(x^2+4x-5)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2-5x\right]_0^2$

$=\left(\frac{8}{3}+8-10\right)-0$

$=\frac{8}{3}-2$

$=\frac{2}{3}$

(3) $\int_2^3(x-2)(x-3)dx$

$=\int_2^3(x^2-5x+6)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x\right]_2^3$

$=\left(9-\frac{45}{2}+18\right)-\left(\frac{8}{3}-10+12\right)$

$=\left(27-\frac{45}{2}\right)-\left(\frac{8}{3}+2\right)$

$=\frac{9}{2}-\frac{14}{3}=\frac{27}{6}-\frac{28}{6}=-\frac{1}{6}$

(4) $\int_{-2}^2 x(x+2)^2dx$

$=\int_{-2}^2 x(x^2+4x+4)dx$

$=\int_{-2}^2(x^3+4x^2+4x)dx$

$=\int_{-2}^2 4x^2dx$

$=4\int_{-2}^2 x^2dx$

$=8\int_0^2 x^2dx$

$=\frac{8}{3}\left[x^3\right]_0^2=\frac{64}{3}$

【定積分の値[2]】

$\boxed{4}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^1(x+2)^2dx-\int_{-1}^1(x-2)^2dx$

$=\int_{-1}^1\{(x+2)^2-(x-2)^2\}dx$

$=\int_{-1}^1\{x^2+4x+4-(x^2-4x+4)\}dx$

$=\int_{-1}^1 8x\,dx$

$=8\int_{-1}^1 x\,dx$

$=0$

(2) $\int_{-1}^2(x^2-x)dx-\int_3^2(x^2-x)dx$

$=\int_{-1}^2(x^2-x)dx+\int_2^3(x^2-x)dx$

$=\int_{-1}^3(x^2-x)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^3$

$=\left(9-\frac{9}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{9}{2}+\frac{5}{6}$

$=\frac{27}{6}+\frac{5}{6}$

$=\frac{32}{6}$

$=\frac{16}{3}$

【定積分を含む関数】

$\boxed{5}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=3x^2+\int_{-1}^{1} f(t)dt$$

$a=\int_{-1}^{1} f(t)dt$ とおく

$f(x)=3x^2+a$

$f(t)=3t^2+a$

$a=\int_{-1}^{1} f(t)dt$

$=\int_{-1}^{1} (3t^2+a)dt$

$=\left[t^3+at\right]_{-1}^{1}$

$=(1+a)-(-1-a)$

$=2a+2$

$a=2a+2$

$a=-2$

よって. $f(x)=3x^2-2$

【$\int_{数}^{x}$ (t の式) dt の導関数】

$\boxed{6}$ x の関数 $\int_0^x(3t^2-2t-1)dt$ の導関数を求めよ。

$3x^2-2x-1$

【定積分と関数の決定】

$\boxed{7}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$\int_a^x f(t)dt=x^2-x-2$ — ①

$f(x)=2x-1$

① で $x=a$ とおくと.

$0=a^2-a-2$

$(a-2)(a+1)=0$

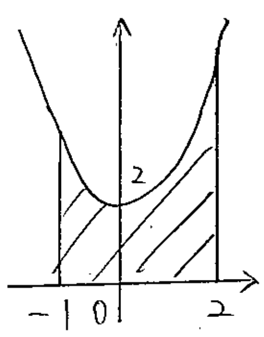
$a=-1, 2$

【曲線と x 軸で囲まれた部分の面積[1]】

$\boxed{8}$ 次の放物線と2直線および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) 放物線 $y=x^2+2$, 2直線 $x=-1$, $x=2$

頂 $(0, 2)$



$\int_{-1}^{2} (x^2+2)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_{-1}^{2}$

$=\left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{3}-2\right)$

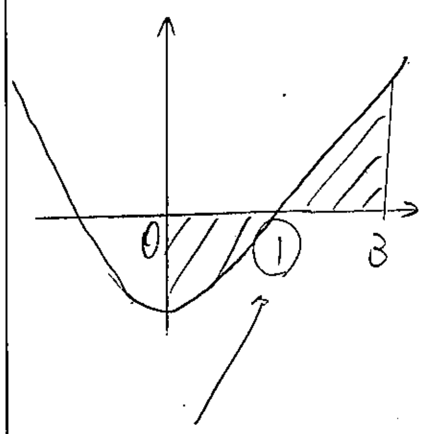
$=\frac{20}{3}+\frac{7}{3}$

$=\frac{27}{3}$

$=9$

(2) 放物線 $y=x^2-1$, 2直線 $x=0$, $x=3$

頂 $(0,-1)$



$0=x^2-1$

$(x+1)(x-1)=0$

$x=-1, 1$

$-\int_0^1 (x^2-1)dx+\int_1^3 (x^2-1)dx$

$=\int_0^1 (-x^2+1)dx+\int_1^3 (x^2-1)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^3$

$=\left(-\frac{1}{3}+1\right)-0+(9-3)-\left(\frac{1}{3}-1\right)$

$=\frac{2}{3}+6+\frac{2}{3}$

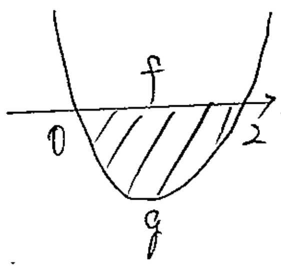
$=\frac{4}{3}+6$

$=\frac{22}{3}$

【曲線と x 軸で囲まれた部分の面積[2]】

$\boxed{9}$ 次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=x^2-2x$



f-g (−1)

$x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

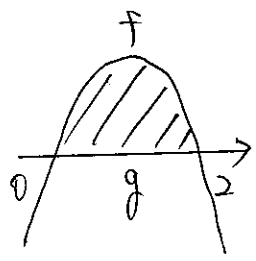
$x=0, 2$

$\int_0^2 -1\,x(x-2)dx$

$=\frac{1(2-0)^3}{6}$

$=\frac{4}{3}$

(2) $y=-2x^2+4x$



f-g (−2)

$-2x^2+4x=0$

$x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$x=0, 2$

$\int_0^2 -2\,x(x-2)dx$

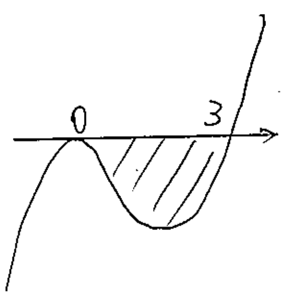
$=\frac{2(2-0)^3}{6}$

$=\frac{8}{3}$

(3) $y=x^2(x-3)$

$x^2(x-3)=0$

$x=0$ (重解), 3



$-\int_0^3 x^2(x-3)dx$

$=-\int_0^3 (x^3-3x^2)dx$

$=\int_0^3 (-x^3+3x^2)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_0^3$

$=-\frac{81}{4}+27-0$

$=-\frac{81}{4}+\frac{108}{4}$

$=\frac{27}{4}$

積分③

【２曲線で囲まれた面積[1]】

$\boxed{10}$ 次の放物線と２直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2-5x$，$y=-x^2+4x$

g　　f

	g	f
$x=1$	-4	3
$x=2$	-6	4

$$\int_1^2 \{(-x^2+4x)-(x^2-5x)\}\,dx$$

$$=\int_1^2 (-2x^2+9x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{9}{2}x^2\right]_1^2$$

$$=\left(-\frac{16}{3}+18\right)-\left(-\frac{2}{3}+\frac{9}{2}\right)$$

$$=\frac{38}{3}-\frac{23}{6}$$

$$=\frac{76}{6}-\frac{23}{6}$$

$$=\frac{53}{6}$$

(2)　$y=x^2-2x+4$，$y=2x^2-4x+3$

f　　g

	f	g
$x=1$	3	1
$x=2$	4	3

$$\int_1^2 \{(x^2-2x+4)-(2x^2-4x+3)\}\,dx$$

$$=\int_1^2 (-x^2+2x+1)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_1^2$$

$$=\left(-\frac{8}{3}+4+2\right)-\left(-\frac{1}{3}+1+1\right)$$

$$=\frac{10}{3}-\frac{5}{3}$$

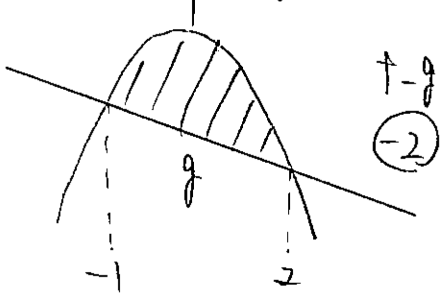
$$=\frac{5}{3}$$

【２曲線で囲まれた面積[2]】

$\boxed{11}$ 次の放物線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=-2x^2+4$，$y=-2x$

f　　g



$f-g$

-2

$$\int_{-1}^2 -2(x-2)(x+1)\,dx$$

$$=\frac{2(2+1)^3}{6}$$

$$=9$$

$$-2x^2+4=-2x$$

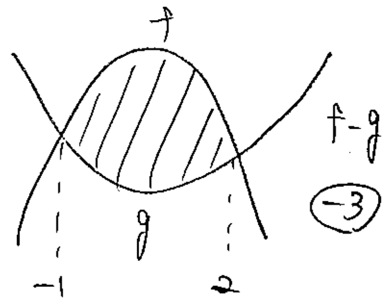
$$2x^2-2x-4=0$$

$$(x-2)(x+1)=0$$

$$x=-1,\ 2$$

(2)　$y=x^2+x-2$，$y=-2x^2+4x+4$

g　　f



$f-g$

-3

$$\int_{-1}^2 -3(x-2)(x+1)\,dx$$

$$=\frac{3(2+1)^3}{6}$$

$$=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\cdot3\cdot3\cdot3}{\cancel{6}\,2}$$

$$=\frac{27}{2}$$

$$x^2+x-2=-2x^2+4x+4$$

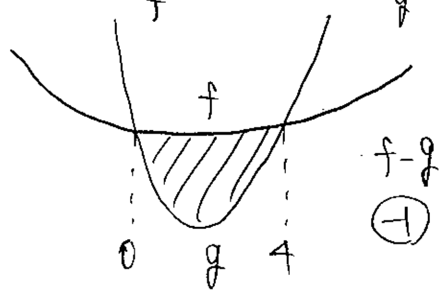
$$3x^2-3x-6=0$$

$$(x-2)(x+1)=0$$

$$x=-1,\ 2$$

(3)　$y=x^2+x+1$，$y=2x^2-3x+1$

f　　g



$f-g$

-1

$$\int_0^4 -1\,x(x-4)\,dx$$

$$=\frac{1(4-0)^3}{6}$$

$$=\frac{32}{3}$$

$$x^2+x+1=2x^2-3x+1$$

$$x^2-4x=0$$

$$x(x-4)=0$$

$$x=0,\ 4$$

【３次関数のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積】

$\boxed{12}$ 次の曲線と x 軸で囲まれた２つの部分の面積の和 S を求めよ。

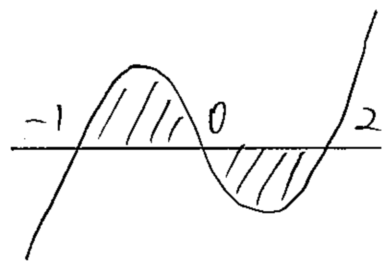
$y=x^3-x^2-2x$

$$x^3-x^2-2x=0$$

$$x(x^2-x-2)=0$$

$$x(x-2)(x+1)=0$$

$$x=-1,\ 0,\ 2$$



$$\int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x)\,dx-\int_0^2 (x^3-x^2-2x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x)\,dx+\int_0^2 (-x^3+x^2+2x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$

$$=0-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)+\left(-4+\frac{8}{3}+4\right)-0$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}$$

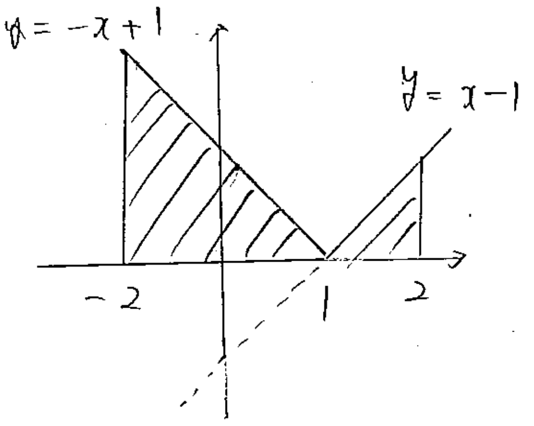
$$=\frac{5}{12}+\frac{32}{12}$$

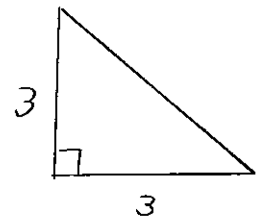
$$=\frac{37}{12}$$

【絶対値を含む関数の定積分】

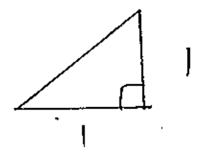
13 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^{2}|x-1|dx$





$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=\frac{9}{2}$

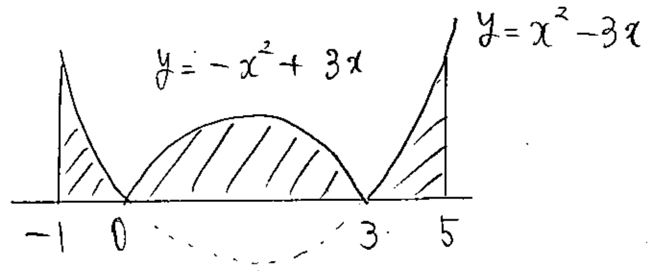


$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$

よって

$\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=5$

(2) $\int_{-1}^{5}|x(x-3)|dx$



$\int_{-1}^{0}(x^2-3x)dx+\int_{0}^{3}(-x^2+3x)dx+\int_{3}^{5}(x^2-3x)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{3}^{5}$

$=0-\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)+\left(-9+\frac{27}{2}\right)-0+\left(\frac{125}{3}-\frac{75}{2}\right)-\left(9-\frac{27}{2}\right)$

$=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-9+\frac{27}{2}+\frac{125}{3}-\frac{75}{2}-9+\frac{27}{2}$

$=42-9-18$

$=15$

【3次関数のグラフと接線で囲まれた部分の面積】

14 曲線 $y=x^3+x^2-2x$ 上に点 A(1, 0) をとる。

(1) 点 A における接線 ℓ の方程式を求めよ。

$f'(x)=3x^2+2x-2$

$f'(1)=3+2-2$

$=3$

よって

$y-0=3(x-1)$

$y=3x-3$

(2) 曲線 $y=x^3+x^2-2x$ と接線 ℓ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$x^3+x^2-2x=3x-3$

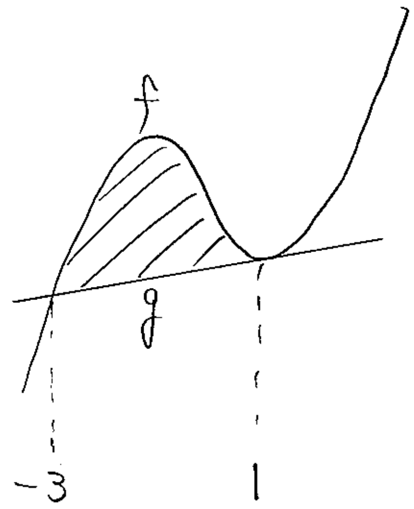
$x^3+x^2-5x+3=0$

$(x-1)(x^2+2x-3)=0$

1	1	1	−5	3
		1	2	−3
	1	2	−3	0

$(x-1)(x+3)(x-1)=0$

$x=-3,\ 1$ (重解)



$\int_{-3}^{1}\{(x^3+x^2-2x)-(3x-3)\}dx$

$=\int_{-3}^{1}(x^3+x^2-5x+3)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{-3}^{1}$

$=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+3\right)-\left(\frac{81}{4}-9-\frac{45}{2}-9\right)$

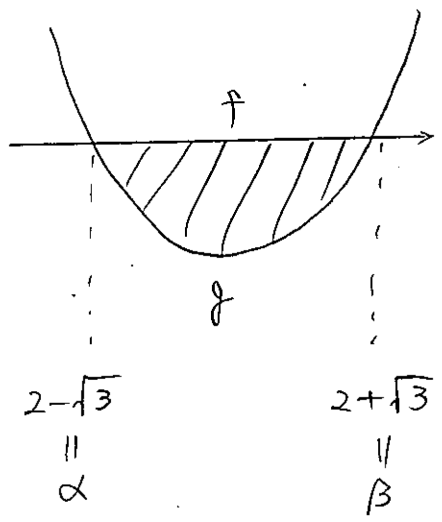
$=-\frac{80}{4}+\frac{1}{3}+\frac{40}{2}+21$

$=-20+20+21+\frac{1}{3}$

$=\frac{64}{3}$

【$\int_{\alpha}^{\beta}-a(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{a(\beta-\alpha)^3}{6}$ の公式】

15 放物線 $y=x^2-4x+1$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。



f−g
−1

$\beta-\alpha$

$=2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})$

$=2\sqrt{3}$

$x^2-4x+1=0$

$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}$

$=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}$

$=2\pm\sqrt{3}$

$\int_{\alpha}^{\beta}-1(x-\alpha)(x-\beta)dx$

$=\frac{1(\beta-\alpha)^3}{6}$

$=\frac{(2\sqrt{3})^3}{6}$

$=4\sqrt{3}$