【空間座標】

1 xy 平面，zx 平面，y 軸，原点のそれぞれに関して，点 (1, −3, 2) と対称な点の座標を求めよ。

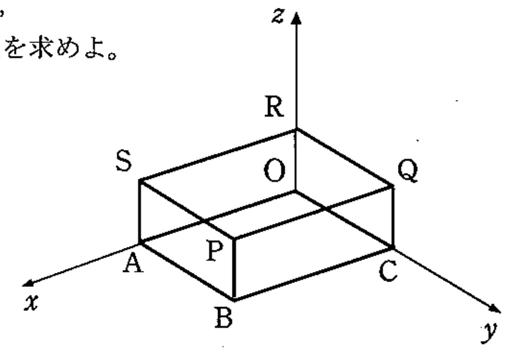
xy 平面　(1 , −3 , −2)

zx 平面　(1 , 3 , 2)

y 軸　(−1 , −3 , −2)

原点　(−1 , 3 , −2)

2 右の図の直方体 OABC−RSPQ において，
点 P の座標が (3, 2, 1) のとき，次の点の座標を求めよ。



B (3 , 2 , 0)

C (0 , 2 , 0)

Q (0 , 2 , 1)

R (0 , 0 , 1)

3 原点 O と次の点の距離を求めよ。

(1) P(2, 3, 6)

$OP = \sqrt{4+9+36}$

$= \sqrt{49}$

$= 7$

(2) Q(3, 4, −5)

$OQ = \sqrt{9+16+25}$

$= \sqrt{50}$

$= 5\sqrt{2}$

4 2 点 A(3, a, 1)，B(1, 4, −3) が，原点 O から等距離にあるとき，a の値を求めよ。

$OA = \sqrt{9+a^2+1} = \sqrt{a^2+10}$

$OB = \sqrt{1+16+9} = \sqrt{26}$

$OA = OB$

$\sqrt{a^2+10} = \sqrt{26}$

$a^2+10 = 26$

$a^2 = 16$　　$a = \pm 4$

5 y 軸上にあって，2 点 A(3, 1, 0)，B(0, 3, 5) から等距離にある点 P の座標を求めよ。

P(0, y, 0)

$\overrightarrow{AP} = (-3, y-1, 0)$　$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{9+(y-1)^2+0}$

$\overrightarrow{BP} = (0, y-3, -5)$　$|\overrightarrow{BP}| = \sqrt{0+(y-3)^2+25}$

$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|$

$|\overrightarrow{AP}|^2 = |\overrightarrow{BP}|^2$

$9+(y-1)^2 = (y-3)^2+25$

$9+y^2-2y+1 = y^2-6y+9+25$

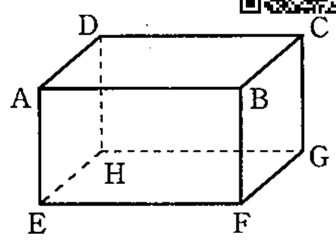
$4y = 24$

$y = 6$

よって　P(0, 6, 0)

【空間のベクトル】

6 右の図の直方体において，$\overrightarrow{AE}$ に等しいベクトルをあげよ。また，$\overrightarrow{AD}$ の逆ベクトルで $\overrightarrow{DA}$ 以外のものをあげよ。



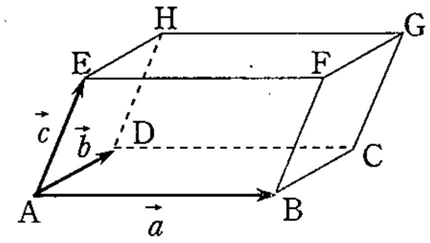
$\overrightarrow{AE}$ に等しいベクトル

$\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{AD}$ の逆ベクトル

$\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{HE}$

7 右の図の平行六面体において，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。



(1) $\overrightarrow{EC} = \vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{BH} = -\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{DF} = -\vec{b}+\vec{a}+\vec{c}$

$= \vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

【空間のベクトルの成分と大きさ】

8 次のベクトルの大きさを求めよ。

(1) $\vec{a}=(3,\ 4,\ 5)$

$|\vec{a}| = \sqrt{9+16+25}$

$= 5\sqrt{2}$

(2) $\vec{b}=(-1,\ 2,\ -2)$

$|\vec{b}| = \sqrt{1+4+4}$

$= 3$

9 $\vec{a}=(1,\ 3,\ -2)$，$\vec{b}=(4,\ -3,\ 0)$ のとき，次のベクトルを求めよ。

(1) $3\vec{a}+2\vec{b}$

$= 3(1, 3, -2) + 2(4, -3, 0)$

$= (3, 9, -6) + (8, -6, 0)$

$= (11, 3, -6)$

(3) $2(-\vec{a}+4\vec{b})$

$= -2\vec{a}+8\vec{b}$

$= -2(1, 3, -2) + 8(4, -3, 0)$

$= (-2, -6, 4) + (32, -24, 0)$

$= (30, -30, 4)$

10 次の 2 点 A，B について，$\overrightarrow{AB}$ を成分表示し，$|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ。

(1) A(2, 1, 4)，B(3, −1, 5)

$\overrightarrow{AB} = (1, -2, 1)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+4+1}$

$= \sqrt{6}$

(2) A(3, 0, −2)，B(1, −4, 2)

$\overrightarrow{AB} = (-2, -4, 4)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+16+16}$

$= 6$

11 $\vec{a}=(x,\ y,\ z)$, $\vec{b}=(-2y+7,\ 1-z,\ 5x+2)$ が等しくなるように，x, y, z の値を定めよ。

$$\begin{cases} x=-2y+7 & —① \\ y=1-z & —② \\ z=5x+2 & —③ \end{cases}$$

x と y の式にして、①と連立

③を②に代入

$y=1-(5x+2)$

$y=-5x-1$ —④

①を代入

$y=-5(-2y+7)-1$

$y=10y-35-1$

$9y=36$

$y=4$

①に代入

$x=-8+7$

$=-1$

③に代入

$z=-5+2$

$=-3$

よって、

$x=-1$, $y=4$, $z=-3$ //

12 $\vec{a}=(1,\ -2,\ -1)$, $\vec{b}=(1,\ -1,\ -2)$, $\vec{c}=(3,\ -2,\ -2)$ のとき，$\vec{p}=(-2,\ 3,\ -2)$ を $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$

$(-2,3,-2)=s(1,-2,-1)+t(1,-1,-2)+u(3,-2,-2)$

$=(s+t+3u,\ -2s-t-2u,\ -s-2t-2u)$

$$\begin{cases} s+t+3u=-2 & —① \\ -2s-t-2u=3 & —② \\ -s-2t-2u=-2 & —③ \end{cases}$$

u を消す

u を消す

①×2 + ②×3

$2s+2t+6u=-4$

$+\ -6s-3t-6u=9$

$-4s-t=5$ —④

② − ③

$-s+t=5$ —⑤

④+⑤

$-5s=10$

$s=-2$

⑤に代入

$t=3$

①に代入

$-2+3+3u=-2$

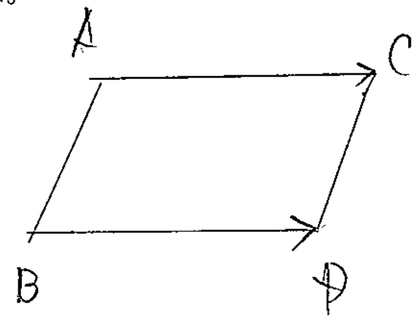
$3u=-3$

$u=-1$

よって

$\vec{p}=-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$ //

13 座標空間に平行四辺形 ABDC があり，A(2, 1, 5), B(−1, 2, 3), C(1, 0, −1), D(x, y, z) であるとする。x, y, z の値を定めよ。



$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{AC}=(-1,-1,-6)$

$\overrightarrow{BD}=(x+1,\ y-2,\ z-3)$

$$\begin{cases} x+1=-1 \\ y-2=-1 \\ z-3=-6 \end{cases}$$

$x=-2$, $y=1$, $z=-3$ //

14 $\vec{a}=(2,\ -4,\ -3)$, $\vec{b}=(1,\ -1,\ 1)$ について，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ を最小にする実数 t の値と，そのときの最小値を求めよ。

$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\,\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$

$$\left(\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{4+16+9}=\sqrt{29} \\ |\vec{b}| &= \sqrt{1+1+1}=\sqrt{3} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} &= 2+4-3=3 \end{aligned}\right)$$

$=29+6t+3t^2$

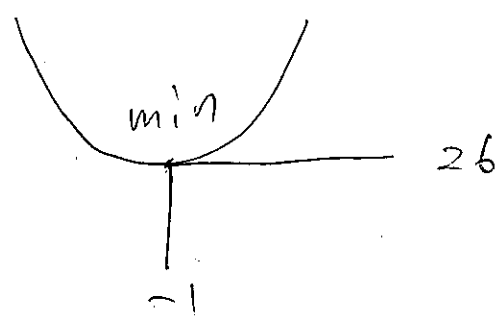
$=3t^2+6t+29$

$=3(t^2+2t)+29$

$=3\{(t+1)^2-1\}+29$

$=3(t+1)^2-3+29$

$=3(t+1)^2+26$



よって

$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ の min 26 $(t=-1)$

$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の min $\sqrt{26}$ $(t=-1)$ //

【ベクトルの内積となす角】

15 次の2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

$\vec{a}=(2,\ -1,\ -2)$, $\vec{b}=(4,\ 3,\ -5)$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 8-3+10=15$

$|\vec{a}| = \sqrt{4+1+4} = 3$

$|\vec{b}| = \sqrt{16+9+25} = 5\sqrt{2}$

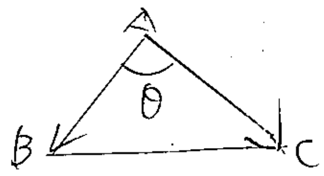
$$= \frac{15}{3\cdot 5\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $\theta = 45^\circ$

16 3点 A(2, 1, 0), B(0, 2, 1), C(1, 0, 2) を頂点とする △ABC において，∠BAC の大きさを求めよ。

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$$



$\overrightarrow{AB} = (-2,\ 1,\ 1)$　　$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$\overrightarrow{AC} = (-1,\ -1,\ 2)$　　$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2-1+2 = 3$

$$= \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

よって $\theta = 60^\circ$

【ベクトルの成分と垂直条件】

18 ベクトル $\vec{a}=(1,\ 0,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ 1,\ 0)$ の両方に垂直で，大きさが3のベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

$\vec{p} = (x,\ y,\ z)$ とおく

$\vec{a}\cdot\vec{p} = 0$ より

$x + z = 0$ —①　　$z = -x$ —①'

$\vec{b}\cdot\vec{p} = 0$ より

$-x + y = 0$ —②　　$y = x$ —②'

$|\vec{p}| = 3$ より

$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 3$

$x^2+y^2+z^2 = 9$ —③

①', ②' を ③ に代入　　①' ②' に代入

$x^2+x^2+x^2 = 9$

$x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3}$

$\vec{p} = (\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

17 $\vec{a}=(1,\ 2,\ x)$, $\vec{b}=(-x^2,\ 2,\ 3)$ が垂直になるように，x の値を定めよ。

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$-x^2+4+3x = 0$

$x^2-3x-4 = 0$

$(x-4)(x+1) = 0$

$x = -1,\ 4$

【一直線上にある3点】

19 次の3点 A(2, 3, 6), B(8, 1, 8), C(−1, x, y) が一直線上にあるとき，x, y の値を求めよ。

3点 A, B, C が一直線上

$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC} = (-3,\ x-3,\ y-6)$

$\overrightarrow{AB} = (6,\ -2,\ 2)$

$(-3,\ x-3,\ y-6) = k(6,\ -2,\ 2)$

$= (6k,\ -2k,\ 2k)$

$-3 = 6k$ —①

$x-3 = -2k$ —②

$y-6 = 2k$ —③

① より $k = -\frac{1}{2}$

② に代入

$x-3 = 1$

$x = 4$

③ に代入

$y-6 = -1$

$y = 5$

よって $x=4,\ y=5$

【同一平面上にある4点】

20 3点 A(3, 1, 2), B(2, 0, −2), C(1, 1, 0) の定める平面 ABC 上に点 P(2, 3, z) があるとき，z の値を求めよ。

$\boxed{\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}}$

$\overrightarrow{CP} = (1,\ 2,\ z)$

$\overrightarrow{CA} = (2,\ 0,\ 2)$

$\overrightarrow{CB} = (1,\ -1,\ -2)$

$(1,\ 2,\ z) = s(2,\ 0,\ 2) + t(1,\ -1,\ -2)$

$= (2s,\ 0,\ 2s) + (t,\ -t,\ -2t)$

$= (2s+t,\ -t,\ 2s-2t)$

$1 = 2s+t$ —①

$2 = -t$ —②

$z = 2s-2t$ —③

② より

$t = -2$

① に代入

$1 = 2s-2$

$2s = 3$

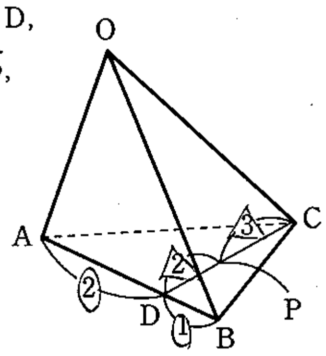
$s = \frac{3}{2}$

③ に代入

$z = 3+4 = 7$

【四面体と内分点】

21 四面体 OABC において，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D，線分 CD を 3 : 2 に内分する点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



$$\overrightarrow{OP} = \frac{3\overrightarrow{OD}+2\vec{c}}{2+3}$$

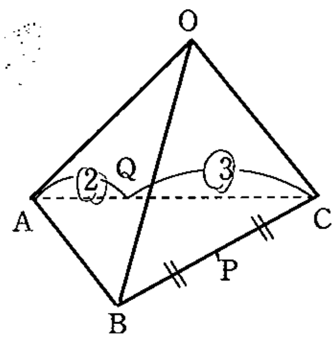
$$= \frac{3}{5}\overrightarrow{OD} + \frac{2}{5}\vec{c}$$

$$\left(\overrightarrow{OD} = \frac{\vec{a}+2\vec{b}}{2+1} = \frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}\right)$$

$$= \frac{3}{5}\left(\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}\right) + \frac{2}{5}\vec{c}$$

$$= \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$$

22 四面体 OABC において，辺 BC の中点を P，辺 CA を 3 : 2 に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{BQ}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$$

$$= \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \vec{a}$$

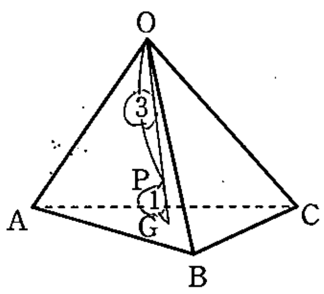
$$= -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OB}$$

$$= \frac{3\vec{a}+2\vec{c}}{2+3} - \vec{b}$$

$$= \frac{3}{5}\vec{a} - \vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$$

23 四面体 OABC において，△ABC の重心を G，線分 OG を 3 : 1 に内分する点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



3点 O, P, G を一直線上

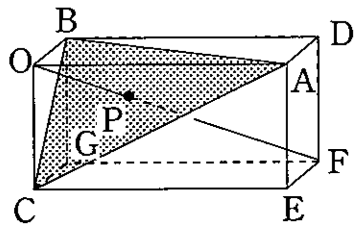
$$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OG}$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)$$

$$= \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$$

【空間ベクトルと平面】

24 右の図のような直方体において，対角線 OF と平面 ABC の交点を P とする。OP : OF を求めよ。



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする

3点 O, P, F は一直線上

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OF}$$

$$= k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$$= k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}$$

4点 A, B, C, P は同一平面上

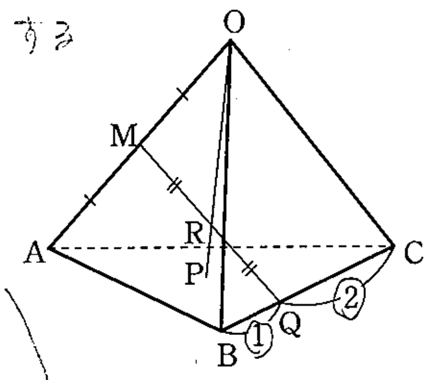
$$k+k+k=1$$

$$3k=1$$

$$k=\frac{1}{3}$$

よって $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

25 四面体 OABC において，辺 OA の中点を M，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を Q，線分 MQ の中点を R とし，直線 OR と平面 ABC の交点を P とする。OR : OP を求めよ。



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする

3点 O, R, P は一直線上

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OR}$$

$$\left(\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ}}{2}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{1+2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right)\\ &= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}\end{aligned}\right)$$

$$\overrightarrow{OP} = k\left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}\right)$$

$$= \frac{1}{4}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} + \frac{1}{6}k\vec{c}$$

4点 A, B, C, P は同一平面上

$$\frac{1}{4}k + \frac{1}{3}k + \frac{1}{6}k = 1$$

$$\frac{3}{12}k + \frac{4}{12}k + \frac{2}{12}k = 1$$

$$\frac{9}{12}k = 1$$

$$k = \frac{4}{3}$$

よって

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$$

【内分点･外分点，三角形の重心の座標】

$\boxed{26}$ 2 点 A (0, 3, 7), B (3, −3, 1), C (−6, 2, −1) について，次の点の座標を求めよ。

(1) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点

$$\left(\frac{1\cdot 0+2\cdot 3}{2+1},\ \frac{1\cdot 3+2(-3)}{2+1},\ \frac{1\cdot 7+2\cdot 1}{2+1}\right)$$

$$=\left(\frac{6}{3},\ \frac{-3}{3},\ \frac{9}{3}\right)$$

$$=(2,\ -1,\ 3)$$

(2) 線分 AB を 3 : 2 に外分する点

$$\left(\frac{-2\cdot 0+3\cdot 3}{3-2},\ \frac{-2\cdot 3+3(-3)}{3-2},\ \frac{-2\cdot 7+3\cdot 1}{3-2}\right)$$

$$=(9,\ -15,\ -11)$$

(3) 線分 BC の中点

$$\left(\frac{3-6}{2},\ \frac{-3+2}{2},\ \frac{1-1}{2}\right)$$

$$=\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$$

(4) △ABC の重心

$$\left(\frac{0+3-6}{3},\ \frac{3-3+2}{3},\ \frac{7+1-1}{3}\right)$$

$$=\left(-1,\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{3}\right)$$

【座標平面に平行な平面の方程式】

$\boxed{27}$ 点 (1, 2, 3) を通り，次のような平面の方程式を求めよ。

(1) xy 平面に平行　(2) yz 平面に平行　(3) y 軸に垂直

(1) $z=3$　(2) $x=1$　(3) $y=2$

【球の公式】

$\boxed{28}$ 次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 原点を中心とする半径 3 の球面

$$x^2+y^2+z^2=9$$

(2) 点 (1, 2, −3) を中心とする半径 4 の球面

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$$

(3) 点 A (0, 4, 1) を中心とし，点 B (2, 4, 5) を通る球面

$x^2+(y-4)^2+z^2=r^2$ とおく

(2, 4, 5) を通るので

$$4+0+16=r^2$$

$$r^2=20$$

よって

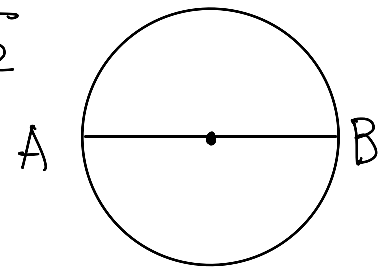
$$x^2+(y-4)^2+z^2=20$$

(4) 2 点 A (4, −2, 1), B (0, 4, −5) が直径の両端とする球面

中心 = ABの中点 $=\left(\frac{4+0}{2},\ \frac{-2+4}{2},\ \frac{1-5}{2}\right)$

$=(2,\ 1,\ -2)$

半径 $=\sqrt{4+9+9}=\sqrt{22}$



よって

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=22$$

【球面と平面が交わってできる円の中心と半径】

$\boxed{29}$ 球面 $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=3^2$ と次の平面が交わる部分は円である。その中心の座標と半径を求めよ。

(1) yz 平面

$x=0$ を代入

$$1+(y-4)^2+(z-2)^2=9$$

$$(y-4)^2+(z-2)^2=8$$

よって

中心 (0, 4, 2)，半径 $2\sqrt{2}$

(2) 平面 $y=4$

$y=4$ を代入

$$(x+1)^2+0+(z-2)^2=9$$

$$(x+1)^2+(z-2)^2=9$$

よって

中心 (−1, 4, 2)，半径 3

$\boxed{30}$ 中心が点 (−2, 0, a)，半径が 4 の球面が，xy 平面と交わってできる円の半径が 3 であるとき，a の値を求めよ。

$$(x+2)^2+y^2+(z-a)^2=16$$

$z=0$ を代入

$$(x+2)^2+y^2+a^2=16$$

$$(x+2)^2+y^2=16-a^2$$

半径 3 より

$$\sqrt{16-a^2}=3$$

$$16-a^2=9$$

$$a^2=7$$

$$a=\pm\sqrt{7}$$

【直線の方程式】

31 次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1) 点 A (1, 2, −3) を通り，$\vec{d}=(2,\ 5,\ 1)$ に平行な直線

$$(x, y, z) = (1, 2, -3) + t(2, 5, 1)$$
$$= (2t+1,\ 5t+2,\ t-3)$$

$$\begin{cases} x = 2t+1 & -① \\ y = 5t+2 & -② \\ z = t-3 & -③ \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \dfrac{x-1}{2} & -①' \\ t = \dfrac{y-2}{5} & -②' \\ t = z+3 & -③' \end{cases}$$

①′②′③′ より

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{5} = z+3 \quad /\!/$$

(2) 2 点 A (−1, 3, −2)，B (2, 7, 3) を通る直線

$$\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (3, 4, 5)$$
$$(x, y, z) = (-1, 3, -2) + t(3, 4, 5)$$
$$= (-1+3t,\ 3+4t,\ -2+5t)$$

$$\begin{cases} x = -1+3t & -① \\ y = 3+4t & -② \\ z = -2+5t & -③ \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \dfrac{x+1}{3} & -①' \\ t = \dfrac{y-3}{4} & -②' \\ t = \dfrac{z+2}{5} & -③' \end{cases}$$

①′②′③′ より

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+2}{5} \quad /\!/$$

(3) 2 点 A (2, −1, 1)，B (−1, 3, 1) を通る直線

$$\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (-3, 4, 0)$$
$$(x, y, z) = (2, -1, 1) + t(-3, 4, 0)$$
$$= (2-3t,\ -1+4t,\ 1)$$

$$\begin{cases} x = 2-3t & -① \\ y = -1+4t & -② \\ z = 1 & -③ \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \dfrac{x-2}{-3} & -①' \\ t = \dfrac{y+1}{4} & -②' \\ z = 1 & -③ \end{cases}$$

①′②′③ より

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{4},\quad z = 1 \quad /\!/$$

(4) 点 A (−3, 5, 2) を通り，z 軸に平行な直線

$$\vec{d} = (0, 0, 1)$$

$$x = -3,\ y = 5 \quad /\!/$$

【平面の方程式】

32 次の条件を満たす平面の方程式を求めよ。

(1) 点 A (2, 3, 1) を通り，$\vec{n}=(3,\ 1,\ 5)$ に垂直な平面

$$3(x-2) + (y-3) + 5(z-1) = 0$$
$$3x + y + 5z - 14 = 0 \quad /\!/$$

(2) 点 A (1, 2, 3) を通り，直線 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=z+3$ に垂直な平面

$$\vec{n} = (2, -2, 1)$$
$$2(x-1) - 2(y-2) + 1(z-3) = 0$$
$$2x - 2y + z - 1 = 0 \quad /\!/$$

(3) 点 A (2, 3, −1) を通り，平面 $3x+4y-5z-7=0$ に平行な平面

$$\vec{n} = (3, 4, -5)$$
$$3(x-2) + 4(y-3) - 5(z+1) = 0$$
$$3x + 4y - 5z - 23 = 0 \quad /\!/$$

(4) 3 点 A (1, 0, 2)，B (0, 1, 0)，C (2, 1, −3) を通る平面

$ax + by + cz + d = 0$ とおく

条件より

$$\begin{cases} a \quad\ \ + 2c + d = 0 & -① \\ \quad b \quad\ \ + d = 0 & -② \\ 2a + b - 3c + d = 0 & -③ \end{cases}$$

② より

$$b = -d \quad -④$$

④ を ③ に代入

$$2a - d - 3c + d = 0$$
$$2a - 3c = 0$$
$$c = \frac{2}{3}a \quad -⑤$$

⑤ を ① に代入 $\qquad a = \dfrac{3}{2}c \quad -⑤'$

$$a + \frac{4}{3}a + d = 0$$
$$a = -\frac{3}{7}d \quad -⑥$$

⑤′ を ① に代入

$$\frac{3}{2}c + 2c + d = 0$$
$$c = -\frac{2}{7}d \quad -⑦$$

④⑥⑦ より

$$-\frac{3}{7}dx - dy - \frac{2}{7}dz + d = 0$$
$$3x + 7y + 2z - 7d = 0 \quad /\!/$$