絶対値

$\alpha=a+bi$　のとき　　$|\alpha|=\sqrt{a^2+b^2}$

2点間の距離

2点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ の距離は　　$\mathrm{AB}=|\beta-\alpha|$

例

$\mathrm{A}(2+3i)$，$\mathrm{B}(1+6i)$ の距離は

$|(1+6i)-(2+3i)|=|-1+3i|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

共役な複素数の性質

① $\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ は実数

② $\overline{\overline{\alpha}}=\alpha$

③ $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$　(和)　　$\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$　(差)

$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\ \overline{\beta}$　(積)　　$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$　(商)

$\overline{\alpha^n}=(\overline{\alpha})^n$　(累乗)

複素数の実数・純虚数条件

α が実数　$\Longrightarrow$　$\alpha=\overline{\alpha}$　頻出

α が純虚数　$\Longrightarrow$　$\alpha\neq0$，$\alpha=-\overline{\alpha}$

絶対値の性質

① $|\alpha|=0$　$\Longleftrightarrow$　$\alpha=0$

② $|\alpha|=|\overline{\alpha}|=|-\alpha|=|-\overline{\alpha}|$

③ $|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}$　頻出

とくに　$|\alpha|=1$ のとき　$\Longleftrightarrow$　$\alpha\overline{\alpha}=1$　$\Longleftrightarrow$　$\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$

④ $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$，　$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

実数倍

3点 0，α，β が一直線上　$\Longleftrightarrow$　$\beta=k\alpha$　（k は実数）

内分・外分

2点 α，β を $m:n$ に内分　$\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}$

2点 α，β を $m:n$ に外分　$\dfrac{-n\alpha+m\beta}{m-n}$

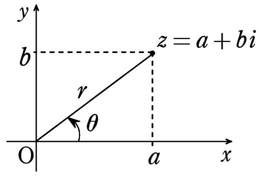
重心

3点 α，β，γ の重心　$\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$

極形式

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

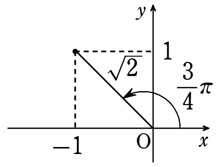
$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$



例

$z=-1+i$ のとき

$z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$



積の極形式

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき

$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

例

$\alpha=\sqrt{3}+i$，$\beta=-1+\sqrt{3}i$ のときの $\alpha\beta$ を極形式で表すと

$\alpha=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\beta=2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$

$\alpha\beta=4\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2}{3}\pi\right)\right\}$

$=4\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)$

積の極形式の図形的意味

点 $r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot z$ は，点 z を原点を中心に θ だけ回転させて，長さを r 倍した点

例

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\alpha=\sqrt{3}+i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$　のとき

$\alpha z=2r\left\{\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$

点 αz は，点 z を原点を中心に $\dfrac{\pi}{6}$ 回転させて，長さを2倍にした点

商の極形式

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$

例

$\alpha=2+2i$，$\beta=\sqrt{3}+i$ のときの $\dfrac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表すと

$\alpha=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\beta=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$

$=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

原点 O を中心とする回転移動

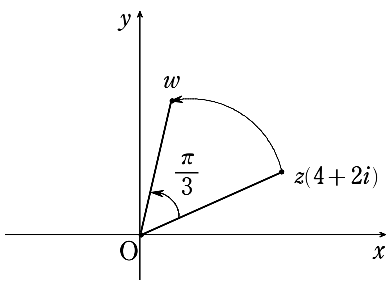
原点 O を中心として点 z を反時計回りに θ 回転移動させた点 w は

$$w=(\cos\theta+i\cos\theta)z$$

例

点 $z=4+2i$ を，原点を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点 w

$$\begin{aligned}w&=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)z\\&=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4+2i)\\&=(2-\sqrt{3})+(1+2\sqrt{3})i\end{aligned}$$



点 α を中心とする回転移動

点 α を中心として点 β を反時計回りに θ 回転移動させた点 γ は

$$\gamma-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$$

γ，β をそれぞれ $-\alpha$ 平行移動して、原点を中心に θ 回転移動する

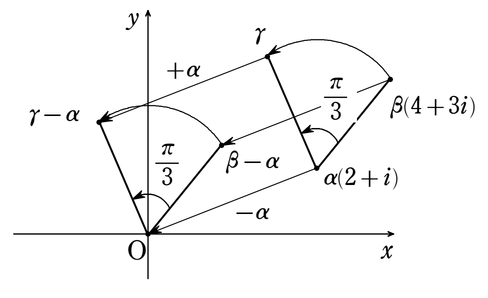
例

点 $\beta=4+3i$ を，点 $\alpha=2+i$ を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点 γ

$$\gamma-\alpha=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\beta-\alpha)$$

$$\gamma-(2+i)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\{4+3i-(2+i)\}$$

$$\begin{aligned}\gamma&=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2-2i)+(2+i)\\&=(3-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})i\end{aligned}$$



ド・モアブルの定理

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \qquad (n：整数)$$

例

$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ 　のとき

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+i)^6&=2^6\left\{\cos\left(6\times\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(6\times\frac{\pi}{6}\right)\right\}\\&=64(\cos\pi+i\sin\pi)\\&=-64\end{aligned}$$

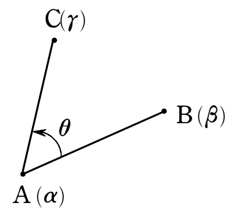
1 の n 乗根

$$z_k=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\times k\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\times k\right) \qquad (k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

1 の n 乗根とは、$z^n=1$ の解で、これらを表す点は，原点を中心とする半径 1 の円周上にあり，正 n 角形の頂点である

2 直線のなす角

$\angle\mathrm{BAC}$ は $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を極形式で表せばわかる



方程式の表す図形

2 点 A(α)，B(β) に対して

$|z-\alpha|=|z-\beta|$ 　$\Longrightarrow$ 　線分 AB の垂直二等分線

$|z-\alpha|=r$ 　$\Longrightarrow$ 　点 α を中心とする半径 r の円

アポロニウスの円

$n|z-\alpha|=m|z-\beta|$

A(α)，B(β) を
$m：n$ に内分する点 C
$m：n$ に外分する点 D 　とすると

直径 CD の円

注 　$m=n$ のとき 　AB の垂直二等分線

例

方程式 $2|z-i|=|z+2i|$ を満たす点 z の全体はどのような図形か。

A(i)，B($-2i$) とすると

AB を 1 : 2 に内分する点 C 　$\dfrac{2i+1(-2i)}{1+2}=0$

AB を 1 : 2 に外分する点 D 　$\dfrac{-2i+1(-2i)}{1-2}=\dfrac{-4i}{-1}=4i$

直径 CD の円

複素数平面の解法

	解法	メリット	デメリット
①	z のまま	計算量 少	z の慣れが必要
②	極形式	回転，n 乗	三角関数の計算
③	図形	計算量 少	図形の慣れが必要
④	$z=x+yi$	万能	計算量 多
⑤	ベクトル	ベクトルで解ける	問題が少ない