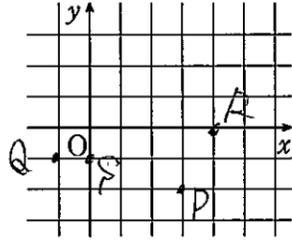


複素数平面①

1 【複素数平面】

次の点を複素数平面上に示せ。

$P(3-2i), Q(-1-i), R(4), S(-i)$



2 【複素数の絶対値】

次の複素数の絶対値を求めよ。

(1) $3-2i$

$\sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

(2) $-2+4i$

$\sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

(3) -5

5

(4) $3i$

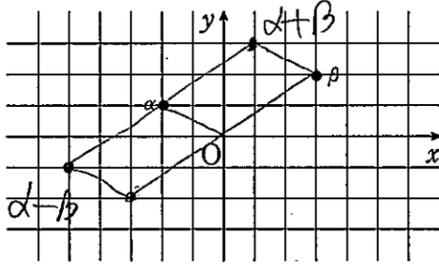
3

3 【複素数の和と差】

右の図の複素数平面上の点 α, β について、次の点を図に示せ。

(1) $\alpha+\beta$

(2) $\alpha-\beta$



4 【2点間の距離】

次の2点間の距離を求めよ。

(1) $A(2+3i), B(1+6i)$

$\sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

(2) $A(3-4i), B(1-2i)$

$\sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

5 【複素数の実数倍】

$\alpha=1+yi, \beta=3-6i$ とする。2点 $A(\alpha), B(\beta)$ と原点 O が一直線上にあるとき、実数 y の値を求めよ。

$\beta = k\alpha$

$\begin{cases} k = 3 \\ ky = -6 \end{cases}$

$3-6i = k + ky i$

$y = -2$

6 【共役複素数の性質】

複素数 α, β について、次のことを証明せよ。

(1) $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$ は実数である。

$z + \bar{z} \iff \text{実数}$

$\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = \alpha\bar{\beta} + \overline{\alpha\bar{\beta}}$

(2) $|\alpha|=1, |\beta|=1$ のとき $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \overline{\alpha+\beta}$

$|\alpha|^2=1, |\beta|^2=1$
 $\alpha\bar{\alpha}=1, \beta\bar{\beta}=1$
 $\frac{1}{\alpha} = \bar{\alpha}, \frac{1}{\beta} = \bar{\beta}$
 $(\text{左辺}) = \bar{\alpha} + \bar{\beta} = \overline{\alpha+\beta} = (\text{右辺})$

7

複素数 z が、 $2z + \bar{z} = 3+i$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

(1) $2\bar{z} + z$ を求めよ。

$2\bar{z} + z = \overline{2z + \bar{z}} = \overline{3+i} = 3-i$

(2) z を求めよ。

$\begin{cases} 2z + \bar{z} = 3+i & \text{--- ①} \\ z + 2\bar{z} = 3-i & \text{--- ②} \end{cases}$
 $① \times 2 - ② = 4z - z = 6+2i$
 $3z = 6+2i$
 $z = 2 + \frac{2}{3}i$

8

$|z|=3$ かつ $|z-2|=4$ を満たす複素数 z について、次の値を求めよ。

(1) $z\bar{z}$

$z\bar{z} = |z|^2 = 9$

(2) $z + \bar{z}$

$|z-2|^2 = 16$

$(z-2)(\bar{z}-2) = 16$

$z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} = 12$
 $\overset{=9}{z\bar{z}} - 2z - 2\bar{z} = 12$

$z + \bar{z} = -\frac{3}{2}$

$-2(z + \bar{z}) = 3$

9 【複素数の極形式】

次の複素数を極形式で表せ。ただし、偏角 θ の範囲は、(1), (2) では $0 \leq \theta < 2\pi$, (3) では $-\pi \leq \theta \leq \pi$ とする。

(1) $\sqrt{3} + i$

(2) $2 + 2i$

$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

(3) $1 - \sqrt{3}i$

$= 2 \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\}$

10

$z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ とするとき、複素数 $z+1$ を極形式で表せ。ただし、偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

$z+1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

$= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$= \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

11 【複素数の積と商の極形式】

$\alpha=2+2i, \beta=\sqrt{3}+i$ のとき、 α, β をそれぞれ極形式で表せ。ただし、偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

$\alpha = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

$\beta = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

$\alpha\beta = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{5}{12}\pi + i \sin \frac{5}{12}\pi \right)$

$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$

12 【原点を中心とする回転】

次の点は、点 z をどのように回転した点か。ただし、回転の角 θ の範囲は $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。

(1) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) z$

(2) $-iz$

$= \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) z$

$= \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right\} z$

原点を中心にして $\frac{\pi}{4}$ 回転

原点を中心にして $-\frac{\pi}{2}$ 回転

13

$z=4-2i$ とする。点 z を原点を中心として次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{2}{3}\pi$

$$\begin{aligned} & (\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})(4-2i) & (\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi)(4-2i) \\ & = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)(4-2i) & = (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(4-2i) \\ & = 2\sqrt{3} + 1 + (2-\sqrt{3})i & = -2 - \sqrt{3}i^2 + i + 2\sqrt{3}i \\ & = \underline{(1+2\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})i} & = \underline{(\sqrt{3}-2) + (2\sqrt{3}+1)i} \end{aligned}$$

(3) $-\frac{\pi}{2}$ (4) $-\frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned} & \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right\} (4-2i) & \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right\} (4-2i) \\ & = -i(4-2i) & = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4-2i) \\ & = -4i - 2 & = (2-\sqrt{3}) - i - 2\sqrt{3}i \\ & = \underline{-2-4i} & = \underline{(2-\sqrt{3}) - (1+2\sqrt{3})i} \end{aligned}$$

14 【点 α を中心して回転した点を表す複素数】

$\alpha=1+i, \beta=5+3i$ とする。点 β を点 α を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数 τ を求めよ。

$$\begin{aligned} \tau - \alpha &= \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) (\beta - \alpha) \\ \tau - \alpha &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) (4+2i) \\ \tau &= (2\sqrt{3}-1) + (2+\sqrt{3})i + 1+i \\ &= \underline{2\sqrt{3} + (3+\sqrt{3})i} \end{aligned}$$

15 【ド・モアブルの定理】

次の式を計算せよ。

(1) $(1+\sqrt{3}i)^5$

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{3}i) &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ (1+\sqrt{3}i)^5 &= 32 \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right) \\ &= 32 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \underline{16 - 16\sqrt{3}i} \end{aligned}$$

(2) $(1+i)^8$

$$\begin{aligned} (1+i) &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ (1+i)^8 &= 16 \left(\cos 2\pi + i \sin 2\pi \right) \\ &= \underline{16} \end{aligned}$$

(3) $(1-\sqrt{3}i)^{-6}$

$$\begin{aligned} (1-\sqrt{3}i) &= 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ (1-\sqrt{3}i)^{-6} &= \frac{1}{64} \left(\cos 2\pi + i \sin 2\pi \right) \\ &= \underline{\frac{1}{64}} \end{aligned}$$

16 【1 の n 乗根】

1 の 6 乗根を求めよ。

$$\begin{aligned} z_\theta &= \cos \frac{2\theta\pi}{n} + i \sin \frac{2\theta\pi}{n} \quad (\theta=0, 1, 2, \dots, n-1) \\ z_\theta &= \cos \frac{1}{3}\theta\pi + i \sin \frac{1}{3}\theta\pi \quad (\theta=0, 1, 2, 3, 4, 5) \\ z_0 &= 1 & z_3 &= -1 \\ z_1 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & z_4 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & z_5 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

17 【複素数 α の n 乗根】

次の方程式を解け。

(1) $z^2=i$

$$\begin{aligned} z &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ z^2 &= r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ r^2 &= 1 & 2\theta &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k: \text{整数}) \\ r &= 1 \quad (r>0) & \theta &= \frac{\pi}{4} + k\pi \\ & & \theta &= \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \\ \therefore z &= \underline{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i} \end{aligned}$$

(2) $z^4=-4$

$$\begin{aligned} z &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ z^4 &= r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 4(\cos \pi + i \sin \pi) \\ r^4 &= 4 & 4\theta &= \pi + 2k\pi \quad (k: \text{整数}) \\ r &= \sqrt{2} \quad (r>0) & \theta &= \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi = \frac{1+2k}{4}\pi \\ & & \theta &= \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \\ \therefore z &= \underline{1+i, -1+i, -1-i, 1-i} \end{aligned}$$

複素数平面③

(3) $z^2 = 1 + \sqrt{3}i$

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$

$r^2 = 2$

$r = \sqrt{2} \quad (r > 0)$

$2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k: \text{整数})$

$\theta = \frac{\pi}{6} + k\pi$

$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$

$\therefore z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right), \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}i}{2}, \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}i}{2}$

18 【線分の内分点, 外分点】

A(1+5i), B(7-i) とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 線分 AB を 1:2 の比に内分する点

(2) 線分 AB を 3:2 の比に外分する点

$\frac{2\alpha + \beta}{1+2} = \frac{2+10i+7-i}{3}$
 $= \frac{9+9i}{3}$
 $= 3+3i$

$\frac{-2\alpha + 3\beta}{3-1} = \frac{-2-10i+21-3i}{2}$
 $= \frac{19-13i}{2}$

(3) 線分 AB の中点

$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{8+4i}{2}$
 $= 4+2i$

19 【三角形の重心】

複素数平面上の 3 点 A(-1+4i), B(3+2i), C(4-3i) を頂点とする $\triangle ABC$ の重心を表す複素数を求めよ。

$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \frac{(-1+4i) + (3+2i) + (4-3i)}{3}$
 $= \frac{6+3i}{3} = 2+i$

20 【方程式の表す図形】

次の方程式を満たす点 z 全体は, どのような図形か。

(1) $|z|=2$

(2) $|z-i|=1$

中心 原点
半径 2 の円

中心 i
半径 1 の円

(3) $|z+1|=1$

(4) $(z-1)(\bar{z}-1)=4$

中心 -1
半径 1 の円

$|z-1|^2 = 4$ 中心 1
 $|z-1|=2$ 半径 2 の円

(4) $|z|=|z+1|$

(4) $|z-2|=|z-4i|$

原点, -1 を結ぶ
垂直二等分線

2, 4 を結ぶ
垂直二等分線

21

方程式 $2|z-3|=|z|$ を満たす点 z 全体は, どのような図形か。

両辺 2 乗

$4|z-3|^2 = |z|^2$

$4(z-3)(\bar{z}-3) = z\bar{z}$

$4(z\bar{z} - 3z - 3\bar{z} + 9) = z\bar{z}$

$3z\bar{z} - 12z - 12\bar{z} + 36 = 0$

$z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 12 = 0$

$(z-4)(\bar{z}-4) = 4$

$|z-4|^2 = 4$

$|z-4| = 2$

中心 4
半径 2 の円

22 【条件を満たす点が描く図形】

$w=i(z-2)$ とする。点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき, 点 w はどのような図形を描くか。

$|z|=1$

$w = iz - 2i$

$iz = w + 2i$

$z = \frac{w + 2i}{i}$

$|z| = \left| \frac{w + 2i}{i} \right| = \frac{|w + 2i|}{|i|} = |w + 2i|$

$|z|=1 \Leftrightarrow |w + 2i|=1$ 中心 -2i
半径 1 の円

23

$w = \frac{z+2}{z-3}$ とする。点 z が原点 O を中心とする半径 2 の円上を動くとき, 点 w はどのような図形を描くか。

$|z|=2$

$w(z-3) = z+2$

$(w-1)z = 3w+2$

$z = \frac{3w+2}{w-1}$

$|z| = \left| \frac{3w+2}{w-1} \right| = 2$

$|3w+2| = 2|w-1|$

両辺 2 乗

$|3w+2|^2 = 4|w-1|^2$

$(3w+2)(3\bar{w}+2) = 4(w-1)(\bar{w}-1)$

$9w\bar{w} + 6w + 6\bar{w} + 4 = 4(w\bar{w} - w - \bar{w} + 1)$

$5w\bar{w} + 10w + 10\bar{w} = 0$

$w\bar{w} + 2w + 2\bar{w} = 0$

$(w+2)(\bar{w}+2) = 4$

$|w+2|^2 = 4$

$|w+2| = 2$

中心 -2
半径 2 の円

24 【半直線のなす角】

3点 $A(1-i)$, $B(2+i)$, $C(2i)$ に対して, 半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ を求めよ。ただし, $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。

$$\begin{aligned} \frac{r-\alpha}{\beta-\alpha} &= \frac{2i - (1-i)}{2+i - (1-i)} \\ &= \frac{3i-1}{2i+1} \\ &= \frac{(3i-1)(2i-1)}{(2i+1)(2i-1)} \\ &= \frac{-5-5i}{-5} \\ &= 1+i \end{aligned}$$

よって $\frac{\pi}{4}$

25 【3点A, B, Cが一直線上、垂直になるときの実部の値】

複素数平面上に3点 $A(-1+i)$, $B(3-i)$, $C(x+3i)$ がある。次の条件を満たすように, 実数 x の値を定めよ。

(1) 2直線 AB , AC が垂直に交わるように, x の値を定めよ。

$$\begin{aligned} \frac{r-\alpha}{\beta-\alpha} &= \frac{x+3i - (-1+i)}{3-i - (-1+i)} \\ &= \frac{x+1+2i}{4-2i} \\ &= \frac{\{(x+1)+2i\}(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} \\ &= \frac{4(x+1)+2(x+1)i+8i-4}{20} \\ &= \frac{4x+2(x+5)i}{20} \\ &= \frac{2x+(x+5)i}{10} \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$

$AB \perp AC \rightarrow$ ①が純虚数

$$\frac{1}{5}x = 0 \quad \underline{x=0}$$

(2) 3点 A, B, C が一直線上にあるように, x の値を定めよ。

AB, AC が一直線上 \rightarrow ①が実数

$$\frac{x+5}{10} = 0 \quad \underline{x=-5}$$

26 【等式から三角形の形状決定】

3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について, 等式 $\gamma = (1-i)\alpha + i\beta$ が成り立つとき, 次のものを求めよ。

(1) 複素数 $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の値

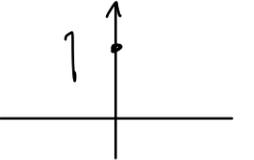
$$\gamma = \alpha - i\alpha + i\beta$$

$$\begin{aligned} r-\alpha &= i\beta - i\alpha \\ &= (\beta-\alpha)i \end{aligned}$$

$\beta \neq \alpha$ より

$$\frac{r-\alpha}{\beta-\alpha} = i$$

(2) $\triangle ABC$ の3つの角の大きさ



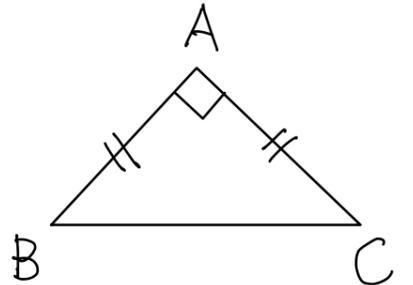
$$\frac{r-\alpha}{\beta-\alpha} = i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore \angle BAC = \frac{\pi}{2}$$

$$\left| \frac{r-\alpha}{\beta-\alpha} \right| = |i| = 1$$

$$|r-\alpha| = |\beta-\alpha|$$

$$AC = AB$$



$$\begin{aligned} \angle A &= 90^\circ \\ \angle B &= 45^\circ \\ \angle C &= 45^\circ \end{aligned}$$

27 【三角形の形状】

3点 $A(-1+i)$, $B(1-i)$, $C(-\sqrt{3}-\sqrt{3}i)$ を頂点とする $\triangle ABC$ はどのような三角形か。

$$\begin{aligned} \frac{r-\alpha}{\beta-\alpha} &= \frac{(-\sqrt{3}-\sqrt{3}i) - (-1+i)}{(1-i) - (-1+i)} = \frac{(1-\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3})i}{2(1-i)} \\ &= \frac{\{(1-\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3})i\}(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \frac{2-2\sqrt{3}i}{4} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore \angle BAC = \frac{\pi}{3}$$

$$\left| \frac{r-\alpha}{\beta-\alpha} \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = 1 \quad |r-\alpha| = |\beta-\alpha|$$

$$AC = AB$$

よって 正三角形