

9

数列 $\left\{ \frac{1-r^n}{1+r^n} \right\}$ の極限を、次の各場合について求めよ。

(1) $r > 1$

(2) $r = 1$

$$\frac{\frac{1}{r^n} - 1}{\frac{1}{r^n} + 1} \xrightarrow{\infty} \frac{-1}{1} = -1 //$$

$$\frac{0}{0} //$$

(3) $|r| < 1$

(4) $r < -1$

$$\frac{1}{1} //$$

$$\frac{\frac{1}{r^n} - 1}{\frac{1}{r^n} + 1} \xrightarrow{\infty} \frac{-1}{1} = -1 //$$

10

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ。

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$x = -\frac{1}{3}x + 1$$

$$a_{n+1} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3} \left(a_n - \frac{3}{4} \right)$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$a_n - \frac{3}{4} \text{ は初 } a_1 - \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \text{ の等比数列}$$

$$\text{公比 } -\frac{1}{3}$$

$$a_n - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

$$a_n = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} + \frac{3}{4} \xrightarrow{\infty} \frac{3}{4} //$$

11 【無限級数】

次のような無限級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$S_n = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$\xrightarrow{\infty} \frac{3}{4} //$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})$$

$$S_n = (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})$$

$$\xrightarrow{\infty} \infty //$$

$$\therefore \text{発散} //$$

12 【無限等比級数】

次のような無限等比級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。

(1) 初項 1, 公比 $\frac{1}{2}$

(2) 初項 $\sqrt{2}$, 公比 $\sqrt{2}$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{1} //$$

$$\text{発散} //$$

(3) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots$

初 1 公比 $-\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} //$$

(5) $(\sqrt{2}+1)+1+(\sqrt{2}-1)+\dots$

初 $\sqrt{2}+1$ 公比 $\sqrt{2}-1$

$$\frac{\sqrt{2}+1}{1 - (\sqrt{2}-1)} = \frac{(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{2}+4}{2} //$$

13

次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。

(1) $1 + (2-x) + (2-x)^2 + \dots$

$$|2-x| < 1 \quad -3 < -x < -1$$

$$-1 < 2-x < 1 \quad 1 < x < 3 //$$

(2) $x + x(2-x) + x(2-x)^2 + \dots$

$$x = 0 \text{ 又は } 0 \text{ に収束}$$

$$|2-x| < 1 \quad -3 < -x < -1 \quad \therefore$$

$$-1 < 2-x < 1 \quad 1 < x < 3 \quad x = 0, 1 < x < 3 //$$

14

座標平面上で、点 P が原点 O から正の向きに 1 だけ進み、そこから負の向きに $\frac{1}{2^2}$, そこから正の向

きに $\frac{1}{2^4}$, そこから負の向きに $\frac{1}{2^6}$ と進む。以下、このような運動を限りなく続けるとき、点 P の

極限の位置の座標を求めよ。

$$1, 1 - \frac{1}{2^2}, 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} //$$

15

次の循環小数を分数で表せ。

(1) $0.\dot{6}$

$$= 0.66666 \dots$$

$$= 0.6 + 0.06 + 0.006 + \dots$$

初 0.6 公比 0.1

$$\frac{0.6}{1 - 0.1} = \frac{0.6}{0.9}$$

$$= \frac{2}{3} //$$

(2) $0.2\dot{3}4$

$$0.2343434 \dots$$

$$= 0.2 + 0.034 + 0.0034 + \dots$$

初 0.034 公比 0.01

$$= 0.2 + \frac{0.034}{1 - 0.01}$$

$$= 0.2 + \frac{0.034}{0.99}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{34}{9990} = \frac{116}{495} //$$