



【空間座標】

1 xy平面, zx平面, y軸, 原点のそれぞれに関して, 点(1, -3, 2)と対称な点の座標を求めよ。

xy平面 (1, -3, -2)

zx平面 (1, 3, 2)

y軸 (-1, -3, 2)

原点 (-1, 3, -2)

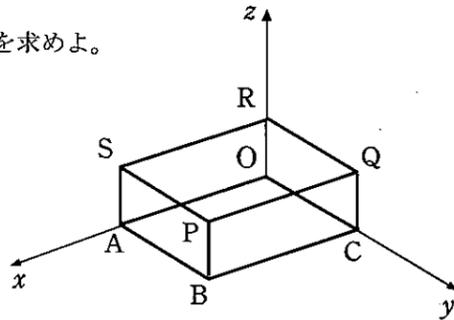
2 右の図の直方体OABC-RSPQにおいて, 点Pの座標が(3, 2, 1)のとき, 次の点の座標を求めよ。

B(3, 2, 0)

C(0, 2, 0)

Q(0, 2, 1)

R(0, 0, 1)



3 原点Oと次の点の距離を求めよ。

(1) P(2, 3, 6)

(2) Q(3, 4, -5)

$$OP = \sqrt{4 + 9 + 36}$$

$$OQ = \sqrt{9 + 16 + 25}$$

$$= \sqrt{49}$$

$$= \sqrt{50}$$

$$= 7$$

$$= 5\sqrt{2}$$

4 2点A(3, a, 1), B(1, 4, -3)が, 原点Oから等距離にあるとき, aの値を求めよ。

$$OA = \sqrt{9 + a^2 + 1} = \sqrt{a^2 + 10}$$

$$OB = \sqrt{1 + 16 + 9} = \sqrt{26}$$

$$OA = OB$$

$$\sqrt{a^2 + 10} = \sqrt{26}$$

$$a^2 + 10 = 26$$

$$a^2 = 16$$

$$a = \pm 4$$

5 y軸上において, 2点A(3, 1, 0), B(0, 3, 5)から等距離にある点Pの座標を求めよ。

P(0, y, 0)

$$\vec{AP} = (-3, y-1, 0) \quad |\vec{AP}| = \sqrt{9 + (y-1)^2 + 0}$$

$$\vec{BP} = (0, y-3, -5) \quad |\vec{BP}| = \sqrt{0 + (y-3)^2 + 25}$$

$$|\vec{AP}| = |\vec{BP}|$$

$$|\vec{AP}|^2 = |\vec{BP}|^2$$

$$9 + (y-1)^2 = (y-3)^2 + 25$$

$$9 + y^2 - 2y + 1 = y^2 - 6y + 9 + 25$$

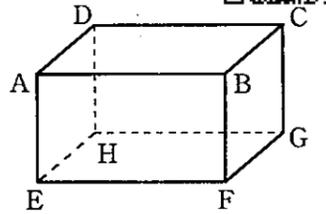
$$4y = 24$$

$$y = 6$$

よって $P(0, 6, 0)$

【空間のベクトル】

6 右の図の直方体において, \vec{AE} に等しいベクトルをあげよ。また, \vec{AD} の逆ベクトルで \vec{DA} 以外のものをあげよ。



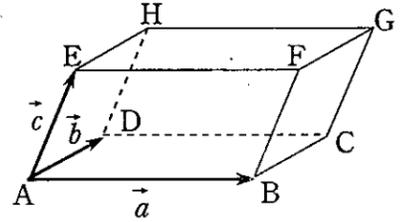
\vec{AE} に等しいベクトル

$$\vec{BF}, \vec{CG}, \vec{DH}$$

\vec{AD} の逆ベクトル

$$\vec{CB}, \vec{GF}, \vec{HE}$$

7 右の図の平行六面体において, 次のベクトルを $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。



(1) $\vec{EC} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

(2) $\vec{BH} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

(3) $\vec{DF} = -\vec{b} + \vec{a} + \vec{c}$
 $= \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

【空間のベクトルの成分と大きさ】

8 次のベクトルの大きさを求めよ。

(1) $\vec{a} = (3, 4, 5)$

(2) $\vec{b} = (-1, 2, -2)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{9 + 16 + 25}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1 + 4 + 4}$$

$$= 6\sqrt{2}$$

$$= 3$$

9 $\vec{a} = (1, 3, -2), \vec{b} = (4, -3, 0)$ のとき, 次のベクトルを求めよ。

(1) $3\vec{a} + 2\vec{b}$

$$= 3(1, 3, -2) + 2(4, -3, 0)$$

$$= (3, 9, -6) + (8, -6, 0)$$

$$= (11, 3, -6)$$

(3) $2(-\vec{a} + 4\vec{b})$

$$= -2\vec{a} + 8\vec{b}$$

$$= -2(1, 3, -2) + 8(4, -3, 0)$$

$$= (-2, -6, 4) + (32, -24, 0)$$

$$= (30, -30, 4)$$

10 次の2点A, Bについて, \vec{AB} を成分表示し, $|\vec{AB}|$ を求めよ。

(1) A(2, 1, 4), B(3, -1, 5)

(2) A(3, 0, -2), B(1, -4, 2)

$$\vec{AB} = (1, -2, 1)$$

$$\vec{AB} = (-2, -4, 4)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1 + 4 + 1}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4 + 16 + 16}$$

$$= \sqrt{6}$$

$$= 6$$



11 $\vec{a}=(x, y, z), \vec{b}=(-2y+7, 1-z, 5x+2)$ が等しくなるように, x, y, z の値を定めよ。

$$\begin{cases} x = -2y + 7 & \text{--- ①} \\ y = 1 - z & \text{--- ②} \\ z = 5x + 2 & \text{--- ③} \end{cases} \quad x \text{ と } y \text{ の式} = z \text{ へ ① と ② を代入}$$

② を ③ に代入

$$\begin{aligned} y &= 1 - (5x + 2) \\ y &= -5x - 1 \quad \text{--- ④} \end{aligned}$$

① を ④ に代入

$$y = -5(-2y + 7) - 1$$

$$y = 10y - 35 - 1$$

$$9y = 36$$

$$y = 4$$

① を ④ に代入

$$\begin{aligned} x &= -8 + 7 \\ &= -1 \end{aligned}$$

③ を ④ に代入

$$\begin{aligned} z &= -5 + 2 \\ &= -3 \end{aligned}$$

$x > z$

$$x = -1, y = 4, z = -3$$

12 $\vec{a}=(1, -2, -1), \vec{b}=(1, -1, -2), \vec{c}=(3, -2, -2)$ のとき, $\vec{p}=(-2, 3, -2)$ を $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$$

$$(-2, 3, -2) = s(1, -2, -1) + t(1, -1, -2) + u(3, -2, -2)$$

$$= (s+t+3u, -2s-t-2u, -s-2t-2u)$$

$$\begin{cases} s+t+3u = -2 & \text{--- ①} \\ -2s-t-2u = 3 & \text{--- ②} \\ -s-2t-2u = -2 & \text{--- ③} \end{cases} \quad \begin{array}{l} u \text{ を消す} \\ u \text{ を消す} \end{array}$$

① × 2 + ② × 3

$$2s + 2t + 6u = -4$$

$$+ -6s - 3t - 6u = 9$$

$$-4s - t = 5 \quad \text{--- ④}$$

② - ③

$$-s + t = 5 \quad \text{--- ⑤}$$

④ + ⑤

$$-5s = 10$$

$$s = -2$$

⑤ を ⑤ に代入

$$t = 3$$

① を ⑤ に代入

$$-2 + 3 + 3u = -2$$

$$3u = -3$$

$$u = -1$$

$s > z$

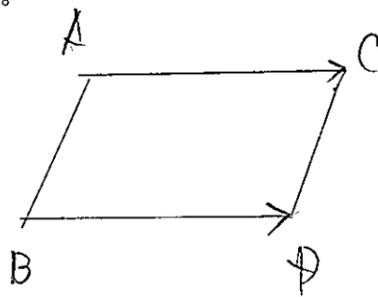
$$\vec{p} = -2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$$

13 座標空間に平行四辺形 ABDC があり, $A(2, 1, 5), B(-1, 2, 3), C(1, 0, -1), D(x, y, z)$ であるとする。 x, y, z の値を定めよ。

$$\vec{AC} = \vec{BD}$$

$$\vec{AC} = (-1, -1, -6)$$

$$\vec{BD} = (x+1, y-2, z-3)$$



$$\begin{cases} x+1 = -1 \\ y-2 = -1 \\ z-3 = -6 \end{cases}$$

$$x = -2, y = 1, z = -3$$

14 $\vec{a}=(2, -4, -3), \vec{b}=(1, -1, 1)$ について, $|\vec{a}+t\vec{b}|$ を最小にする実数 t の値と, そのときの最小値を求めよ。

$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a}\cdot\vec{b} + t^2|\vec{b}|^2$$

$$\begin{pmatrix} |\vec{a}| = \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29} \\ |\vec{b}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 2+4-3 = 3 \end{pmatrix}$$

$$= 29 + 6t + 3t^2$$

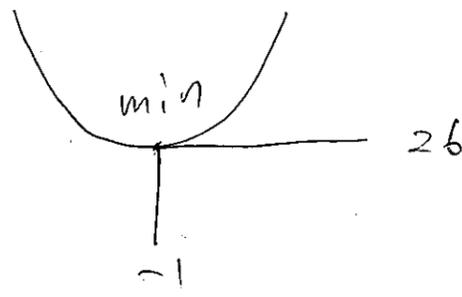
$$= 3t^2 + 6t + 29$$

$$= 3(t^2 + 2t) + 29$$

$$= 3\left\{ (t+1)^2 - 1 \right\} + 29$$

$$= 3(t+1)^2 - 3 + 29$$

$$= 3(t+1)^2 + 26$$



$s > z$

$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2 \text{ の } \min \geq 26 \quad (t = -1)$$

$$|\vec{a}+t\vec{b}| \text{ の } \min \sqrt{26} \quad (t = -1)$$



【ベクトルの内積となす角】

15 次の2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} のなす角 θ を求めよ。

$\vec{a}=(2, -1, -2), \vec{b}=(4, 3, -5)$

$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$

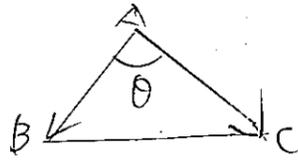
$$\left(\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 8 - 3 + 10 = 15 \\ |\vec{a}| &= \sqrt{4 + 1 + 4} = 3 \\ |\vec{b}| &= \sqrt{16 + 9 + 25} = 5\sqrt{2} \end{aligned} \right)$$

$= \frac{15}{3 \cdot 5\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \theta = 45^\circ$

16 3点 A(2, 1, 0), B(0, 2, 1), C(1, 0, 2) を頂点とする $\triangle ABC$ において, $\angle BAC$ の大きさを求めよ。



$\cos\theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|}$

$$\left(\begin{aligned} \vec{AB} &= (-2, 1, 1) & |\vec{AB}| &= \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6} \\ \vec{AC} &= (-1, -1, 2) & |\vec{AC}| &= \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6} \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= 2 - 1 + 2 = 3 \end{aligned} \right)$$

$= \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}$

$= \frac{1}{2}$

$\therefore \theta = 60^\circ$

【ベクトルの成分と垂直条件】

18 ベクトル $\vec{a}=(1, 0, 1), \vec{b}=(-1, 1, 0)$ の両方に垂直で, 大きさが3のベクトル \vec{p} を求めよ。

$\vec{p} = (x, y, z)$ とおく

$\vec{a} \cdot \vec{p} = 0 \quad \therefore y$

$x + z = 0 \quad \text{--- ①} \quad z = -x \quad \text{--- ①'}$

$\vec{b} \cdot \vec{p} = 0 \quad \therefore y$

$-x + y = 0 \quad \text{--- ②} \quad y = x \quad \text{--- ②'}$

$|\vec{p}| = 3 \quad \therefore y$

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3$

$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \text{--- ③}$

①', ②' を ③ に代入

①' ②' に代入

$x^2 + x^2 + x^2 = 9$

$x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3}$

$\vec{p} = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$

$(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$

17 $\vec{a}=(1, 2, x), \vec{b}=(-x^2, 2, 3)$ が垂直になるように, x の値を定めよ。

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$-x^2 + 4 + 3x = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x-4)(x+1) = 0$

$x = -1, 4$

【一直線上にある3点】

19 次の3点 A(2, 3, 6), B(8, 1, 8), C(-1, x, y) が一直線上にあるとき, x, y の値を求めよ。

3点 A, B, C が一直線上

$\vec{AC} = k \vec{AB}$

$$\left(\begin{aligned} \vec{AC} &= (-3, x-3, y-6) \\ \vec{AB} &= (6, -2, 2) \end{aligned} \right)$$

$(-3, x-3, y-6) = k(6, -2, 2)$
 $= (6k, -2k, 2k)$

$$\begin{cases} -3 = 6k & \text{--- ①} \\ x-3 = -2k & \text{--- ②} \\ y-6 = 2k & \text{--- ③} \end{cases}$$

①より $k = -\frac{1}{2}$

③に代入

$y-6 = -1$

$y = 5$

②に代入

$x-3 = 1$

$x = 4$

\therefore

$x = 4, y = 5$

【同一平面上にある4点】

20 3点 A(3, 1, 2), B(2, 0, -2), C(1, 1, 0) の定める平面 ABC 上に点 P(2, -3, z) があるとき, z の値を求めよ。

$\vec{CP} = s\vec{CA} + t\vec{CB}$

$$\left(\begin{aligned} \vec{CP} &= (1, 2, z) \\ \vec{CA} &= (2, 0, 2) \\ \vec{CB} &= (1, -1, -2) \end{aligned} \right)$$

$(1, 2, z) = s(2, 0, 2) + t(1, -1, -2)$

$= (2s, 0, 2s) + (t, -t, -2t)$

$= (2s+t, -t, 2s-2t)$

$$\begin{cases} 1 = 2s+t & \text{--- ①} \\ 2 = -t & \text{--- ②} \\ z = 2s-2t & \text{--- ③} \end{cases}$$

①に代入

$1 = 2s - 2$

$2s = 3$

$s = \frac{3}{2}$

②より

$t = -2$

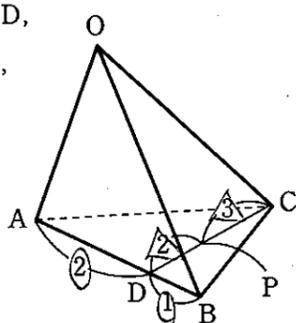
③に代入

$z = 3 + 4 = 7$



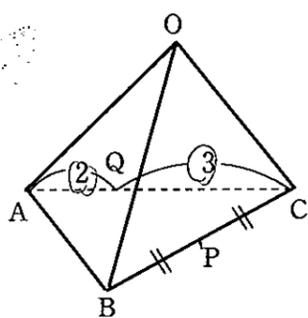
【四面体と内分点】

21 四面体 OABC において、辺 AB を 2:1 に内分する点を D、線分 CD を 3:2 に内分する点を P とする。 $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$ とするとき、 \vec{OP} をそれぞれ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。



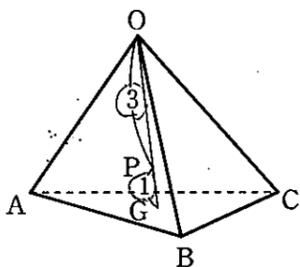
$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \frac{3\vec{OD} + 2\vec{C}}{2+3} \\ &= \frac{3}{5}\vec{OD} + \frac{2}{5}\vec{C} \\ \left(\begin{aligned} \vec{OD} &= \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{2+1} \\ &= \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3} \end{aligned} \right) \\ &= \frac{3}{5} \left(\frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3} \right) + \frac{2}{5}\vec{c} \\ &= \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c} \end{aligned}$$

22 四面体 OABC において、辺 BC の中点を P、辺 CA を 3:2 に内分する点を Q とする。 $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$ とするとき、 \vec{AP} , \vec{BQ} をそれぞれ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。



$$\begin{aligned} \vec{AP} &= \vec{OP} - \vec{OA} \\ &= \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \vec{a} \\ &= -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \\ \vec{BQ} &= \vec{OQ} - \vec{OB} \\ &= \frac{3\vec{a} + 2\vec{c}}{2+3} - \vec{b} \\ &= \frac{3}{5}\vec{a} - \vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c} \end{aligned}$$

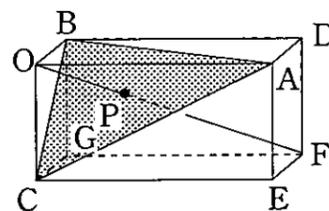
23 四面体 OABC において、 $\triangle ABC$ の重心を G、線分 OG を 3:1 に内分する点を P とする。 $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$ とするとき、 \vec{OP} をそれぞれ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。



$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \frac{3}{4}\vec{OG} \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \right) \\ &= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4} \end{aligned}$$

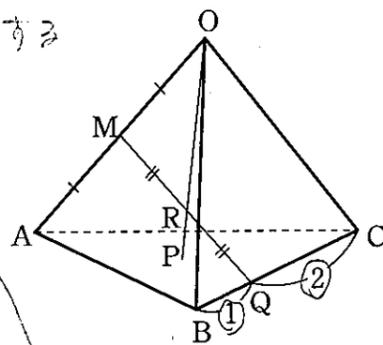
【空間ベクトルと平面】

24 右の図のような直方体において、対角線 OF と平面 ABC の交点を P とする。 $OP:OF$ を求めよ。



$$\begin{aligned} \vec{OA} &= \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c} \text{ とする} \\ \text{3点 } O, P, F &\text{ は一直線上} \\ \vec{OP} &= k\vec{OF} \\ &= k(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ &= k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c} \\ \text{4点 } A, B, C, P &\text{ は同一平面上} \\ k + k + k &= 1 \\ 3k &= 1 \\ k &= \frac{1}{3} \\ \therefore \vec{OP} &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \end{aligned}$$

25 四面体 OABC において、辺 OA の中点を M、辺 BC を 1:2 に内分する点を Q、線分 MQ の中点を R とし、直線 OR と平面 ABC の交点を P とする。 $OR:OP$ を求めよ。



$$\begin{aligned} \vec{OA} &= \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c} \text{ とする} \\ \text{3点 } O, R, P &\text{ は一直線上} \\ \vec{OP} &= k\vec{OR} \\ \left(\begin{aligned} \vec{OR} &= \frac{\vec{OM} + \vec{OQ}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\vec{OM} + \frac{1}{2}\vec{OQ} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{2\vec{b} + \vec{c}}{1+2} \right) \\ &= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \right) \\ &= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c} \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= k \left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c} \right) \\ &= \frac{1}{4}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} + \frac{1}{6}k\vec{c} \end{aligned}$$

4点 A, B, C, P は同一平面上

$$\frac{1}{4}k + \frac{1}{3}k + \frac{1}{6}k = 1$$

$$\frac{3}{12}k + \frac{4}{12}k + \frac{2}{12}k = 1 \quad \therefore \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{9}{12}k &= 1 \\ k &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\vec{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$$



【内分点・外分点, 三角形の重心の座標】

26 2点 A(0, 3, 7), B(3, -3, 1), C(-6, 2, -1) について, 次の点の座標を求めよ。

(1) 線分 AB を 2:1 に内分する点

$$\left(\frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 3}{2+1}, \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot (-3)}{2+1}, \frac{1 \cdot 7 + 2 \cdot 1}{2+1} \right)$$

$$= \left(\frac{6}{3}, \frac{-3}{3}, \frac{9}{3} \right)$$

$$= \underline{\underline{(2, -1, 3)}}$$

(2) 線分 AB を 3:2 に外分する点

$$\left(\frac{-2 \cdot 0 + 3 \cdot 3}{3-2}, \frac{-2 \cdot 3 + 3 \cdot (-3)}{3-2}, \frac{-2 \cdot 7 + 3 \cdot 1}{3-2} \right)$$

$$= \underline{\underline{(9, -15, -11)}}$$

(3) 線分 BC の中点

$$\left(\frac{3-6}{2}, \frac{-3+2}{2}, \frac{1-1}{2} \right)$$

$$= \underline{\underline{\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)}}$$

(4) $\triangle ABC$ の重心

$$\left(\frac{0+3-6}{3}, \frac{3-3+2}{3}, \frac{7+1-1}{3} \right)$$

$$= \underline{\underline{\left(-1, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)}}$$

【座標平面に平行な平面の方程式】

27 点(1, 2, 3)を通り, 次のような平面の方程式を求めよ。

(1) xy 平面に平行

$$\underline{\underline{z=3}}$$

(2) yz 平面に平行

$$\underline{\underline{x=1}}$$

(3) y 軸に垂直

$$\underline{\underline{y=2}}$$

【球の公式】

28 次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 原点を中心とする半径 3 の球面

$$\underline{\underline{x^2 + y^2 + z^2 = 9}}$$

(2) 点(1, 2, -3)を中心とする半径 4 の球面

$$\underline{\underline{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 16}}$$

(3) 点 A(0, 4, 1)を中心とし, 点 B(2, 4, 5)を通る球面

$$x^2 + (y-4)^2 + z^2 = r^2 \text{ とおく}$$

(2, 4, 5) を通るから

$$4 + 0 + 16 = r^2$$

$$r^2 = 20$$

よって

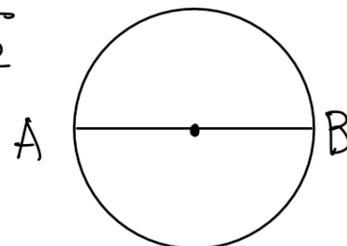
$$\underline{\underline{x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 20}}$$

(4) 2点 A(4, -2, 1), B(0, 4, -5) が直径の両端とする球面

$$\text{中心} = \text{AB の中点} = \left(\frac{4+0}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{1-5}{2} \right)$$

$$= (2, 1, -2)$$

$$\text{半径} = \sqrt{4+9+9} = \sqrt{22}$$



よって

$$\underline{\underline{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 22}}$$

【球面と平面が交わってできる円の中心と半径】

29 球面 $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 3^2$ と次の平面が交わる部分は円である。その中心の座標と半径を求めよ。

(1) yz 平面

$$x=0 \text{ を代入}$$

$$1 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 9$$

$$(y-4)^2 + (z-2)^2 = 8$$

よって

$$\underline{\underline{\text{中心}(0, 4, 2), \text{半径 } 2\sqrt{2}}}}$$

(2) 平面 $y=4$

$$y=4 \text{ を代入}$$

$$(x+1)^2 + 0 + (z-2)^2 = 9$$

$$(x+1)^2 + (z-2)^2 = 9$$

よって

$$\underline{\underline{\text{中心}(-1, 4, 2), \text{半径 } 3}}}}$$

30 中心が点 $(-2, 0, a)$, 半径が 4 の球面が, xy 平面と交わってできる円の半径が 3 であるとき, a の値を求めよ。

$$(x+2)^2 + y^2 + (z-a)^2 = 16$$

$$z=0 \text{ を代入}$$

$$(x+2)^2 + y^2 + a^2 = 16$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 16 - a^2$$

半径 3 より

$$\sqrt{16 - a^2} = 3$$

$$16 - a^2 = 9$$

$$a^2 = 7$$

$$\underline{\underline{a = \pm\sqrt{7}}}}$$



【直線の方程式】

31 次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1) 点 A(1, 2, -3) を通り, $\vec{d}=(2, 5, 1)$ に平行な直線

$$(x, y, z) = (1, 2, -3) + t(2, 5, 1) \\ = (2t+1, 5t+2, t-3)$$

$$\begin{cases} x = 2t+1 & \text{---①} \\ y = 5t+2 & \text{---②} \\ z = t-3 & \text{---③} \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{x-1}{2} & \text{---①'} \\ t = \frac{y-2}{5} & \text{---②'} \\ t = z+3 & \text{---③'} \end{cases}$$

①'②'③' より

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{5} = z+3 \quad \#$$

(2) 2点 A(-1, 3, -2), B(2, 7, 3) を通る直線

$$\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (3, 4, 5)$$

$$(x, y, z) = (-1, 3, -2) + t(3, 4, 5) \\ = (-1+3t, 3+4t, -2+5t)$$

$$\begin{cases} x = -1+3t & \text{---①} \\ y = 3+4t & \text{---②} \\ z = -2+5t & \text{---③} \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{x+1}{3} & \text{---①'} \\ t = \frac{y-3}{4} & \text{---②'} \\ t = \frac{z+2}{5} & \text{---③'} \end{cases}$$

①'②'③' より

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+2}{5} \quad \#$$

(3) 2点 A(2, -1, 1), B(-1, 3, 1) を通る直線

$$\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (-3, 4, 0)$$

$$(x, y, z) = (2, -1, 1) + t(-3, 4, 0) \\ = (2-3t, -1+4t, 1)$$

$$\begin{cases} x = 2-3t & \text{---①} \\ y = -1+4t & \text{---②} \\ z = 1 & \text{---③} \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{x-2}{-3} & \text{---①'} \\ t = \frac{y+1}{4} & \text{---②'} \\ z = 1 & \text{---③} \end{cases}$$

①'②'③' より

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{4}, \quad z=1 \quad \#$$

(4) 点 A(-3, 5, 2) を通り, z 軸に平行な直線

$$x = -3, \quad y = 5, \quad \vec{d} = (0, 0, 1) \quad \#$$

【平面の方程式】

32 次の条件を満たす平面の方程式を求めよ。

(1) 点 A(2, 3, 1) を通り, $\vec{n}=(3, 1, 5)$ に垂直な平面

$$3(x-2) + (y-3) + 5(z-1) = 0 \\ 3x + y + 5z - 14 = 0 \quad \#$$

(2) 点 A(1, 2, 3) を通り, 直線 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} = z+3$ に垂直な平面

$$\vec{n} = (2, -2, 1) \\ 2(x-1) - 2(y-2) + 1(z-3) = 0 \\ 2x - 2y + z - 1 = 0 \quad \#$$

(3) 点 A(2, 3, -1) を通り, 平面 $3x+4y-5z-7=0$ に平行な平面

$$\vec{n} = (3, 4, -5) \\ 3(x-2) + 4(y-3) - 5(z+1) = 0 \\ 3x + 4y - 5z - 23 = 0 \quad \#$$

(4) 3点 A(1, 0, 2), B(0, 1, 0), C(2, 1, -3) を通る平面

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{とおく}$$

条件より

$$\begin{cases} a + 2c + d = 0 & \text{---①} \\ b + d = 0 & \text{---②} \\ 2a + b - 3c + d = 0 & \text{---③} \end{cases}$$

②より

$$b = -d \quad \text{---④}$$

④を③に代入

$$2a - d - 3c + d = 0$$

$$2a - 3c = 0$$

$$c = \frac{2}{3}a \quad \text{---⑤}$$

⑤を①に代入

$$a = \frac{3}{2}c \quad \text{---⑤'}$$

$$a + \frac{4}{3}a + d = 0$$

$$a = -\frac{3}{7}d \quad \text{---⑥}$$

⑤'を①に代入

$$\frac{3}{2}c + 2c + d = 0$$

$$c = -\frac{2}{7}d \quad \text{---⑦}$$

④⑥⑦より

$$-\frac{3}{7}d x - d y - \frac{2}{7}d z + d = 0$$

$$3x + 7y + 2z - 7 = 0 \quad \#$$