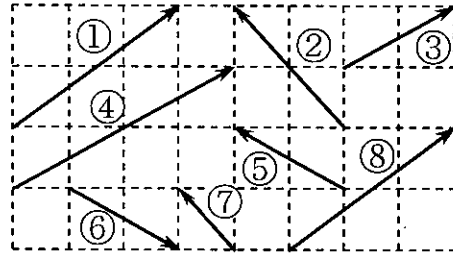




【等しいベクトル】

1 右の図に示されたベクトルについて、次のようなベクトルの番号の組をすべてあげよ。



(1) 向きが同じベクトル

①と⑧, ②と⑦, ③と④

(2) 互いに等しいベクトル

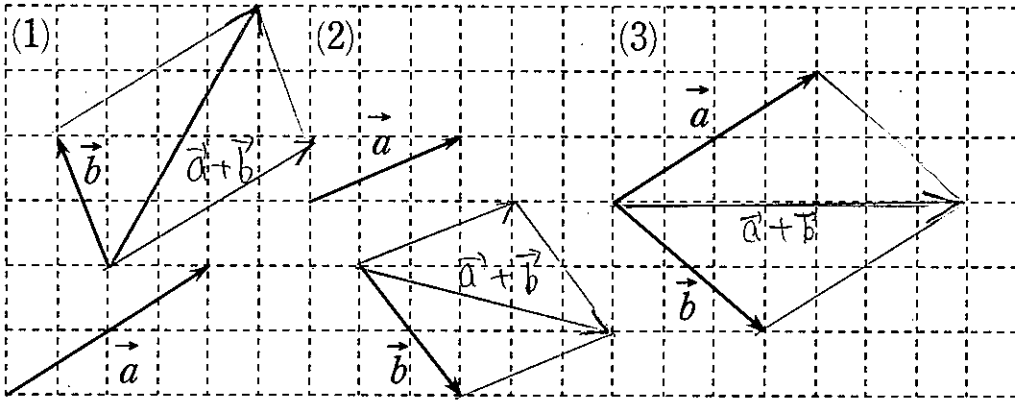
①と⑧

(3) 互いに逆ベクトル

⑤と⑥

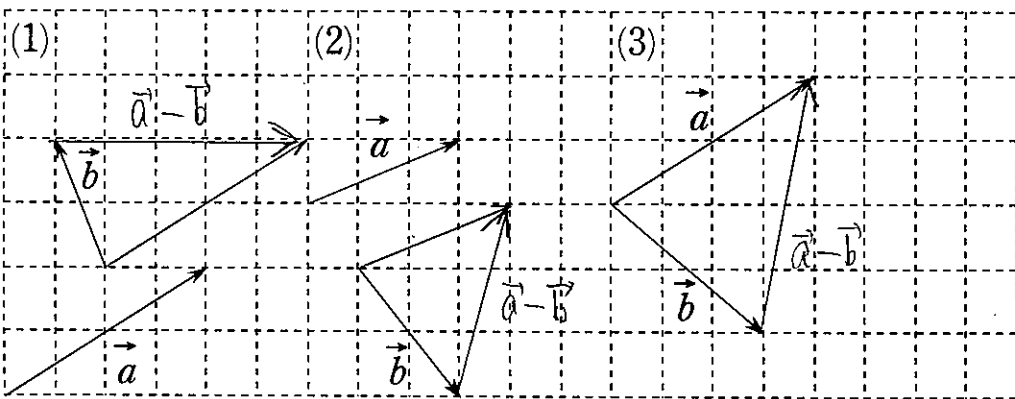
【ベクトルの加法】

2 次のベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  について,  $\vec{a} + \vec{b}$  をそれぞれ図示せよ。



【ベクトルの減法】

3 次のベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  について,  $\vec{a} - \vec{b}$  をそれぞれ図示せよ。



【ベクトルの等式の証明】

4 次の等式が成り立つことを示せ。

(1)  $\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CA} = \vec{CD}$

(左辺) =  $\vec{AB} + \vec{CA}$   
 =  $\vec{CA} + \vec{AB}$   
 =  $\vec{CB}$   
 = (右辺)

よって (左辺) = (右辺)

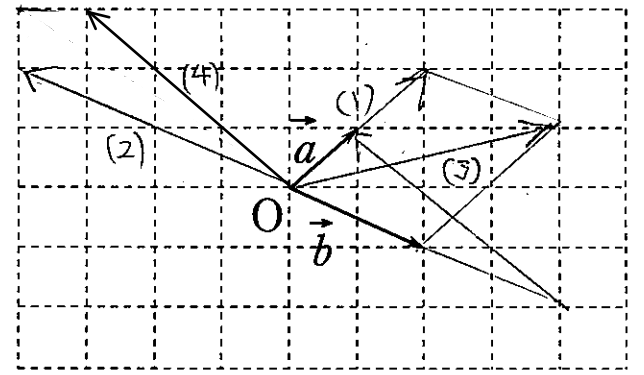
(2)  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$

(左辺) =  $\vec{AC} + \vec{CA}$   
 =  $\vec{AA}$   
 =  $\vec{0}$   
 = (右辺)

よって (左辺) = (右辺)

【ベクトルの実数倍】

5 右の図のベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  について, 次のベクトルを  $O$  を始点にして図示せよ。



- (1)  $2\vec{a}$
- (2)  $-2\vec{b}$
- (3)  $2\vec{a} + \vec{b}$
- (4)  $\vec{a} - 2\vec{b}$

【ベクトルの計算】

6 次の計算をせよ。

(1)  $\vec{a} + 3\vec{a} - 2\vec{a}$   
 =  $2\vec{a}$

(2)  $3\vec{a} + 7\vec{b} - 5\vec{a} - 2\vec{b}$   
 =  $-2\vec{a} + 5\vec{b}$

(3)  $3(2\vec{a} + \vec{b}) + 4(\vec{a} - 2\vec{b})$   
 =  $6\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{a} - 8\vec{b}$   
 =  $10\vec{a} - 5\vec{b}$

(4)  $2(\vec{a} - 3\vec{b}) - 3(3\vec{a} - 2\vec{b})$   
 =  $2\vec{a} - 6\vec{b} - 9\vec{a} + 6\vec{b}$   
 =  $-7\vec{a}$

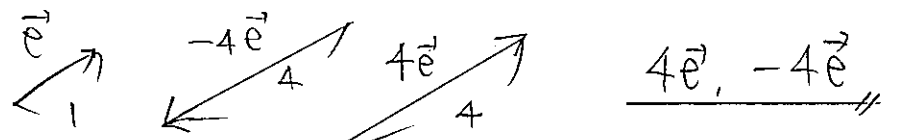
(5)  $\frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b}) + \frac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b})$   
 =  $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$   
 =  $\vec{0}$

(6)  $\frac{1}{2}(-\vec{a} + 2\vec{b}) - \frac{1}{3}(2\vec{a} + \vec{b})$   
 =  $-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$   
 =  $-\frac{3}{6}\vec{a} - \frac{4}{6}\vec{a} + \frac{3}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{b}$   
 =  $-\frac{7}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

【ベクトルの平行と単位ベクトル】

7 次の問いに答えよ。

(1)  $\vec{e}$  を単位ベクトルとする。  $\vec{e}$  と平行で大きさが4のベクトルを,  $\vec{e}$  を用いて表せ。

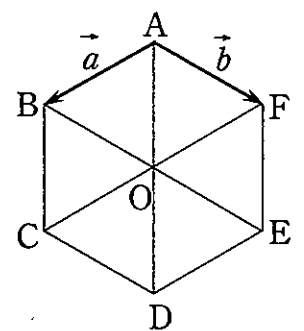


(2)  $|\vec{a}| = 3$  のとき,  $\vec{a}$  と同じ向きの単位ベクトルを  $\vec{a}$  を用いて表せ。



【正六角形とベクトル】

8 正六角形 ABCDEF において,  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{AF} = \vec{b}$  とするとき, 次のベクトルを  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ。



(1)  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$   
 =  $\vec{a} + \vec{a} + \vec{b}$   
 =  $2\vec{a} + \vec{b}$

(2)  $\vec{EF} = -(\vec{a} + \vec{b})$   
 =  $-\vec{a} - \vec{b}$

(3)  $\vec{DB} = \vec{DC} + \vec{CB}$   
 =  $-\vec{b} - (\vec{a} + \vec{b})$   
 =  $-\vec{a} - 2\vec{b}$



【等式を満たすベクトルの決定】

9 等式  $\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} = \vec{a} + \vec{b} & \text{--- ①} \\ 2\vec{x} + 3\vec{y} = \vec{a} - \vec{b} & \text{--- ②} \end{cases}$  を満たす  $\vec{x}, \vec{y}$  を  $\vec{a}, \vec{b}$  を用いて表せ。

$\vec{x}$  を消す

$\vec{y}$  を消す

$$\begin{aligned} 2\vec{x} - 2\vec{y} &= 2\vec{a} + 2\vec{b} & \text{--- ①} \times 2 \\ -2\vec{x} + 3\vec{y} &= \vec{a} - \vec{b} & \text{--- ②} \end{aligned}$$

$$-5\vec{y} = \vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{y} = -\frac{1}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$$

$$\begin{aligned} 3\vec{x} - 3\vec{y} &= 3\vec{a} + 3\vec{b} & \text{--- ①} \times 3 \\ +2\vec{x} + 3\vec{y} &= \vec{a} - \vec{b} & \text{--- ②} \end{aligned}$$

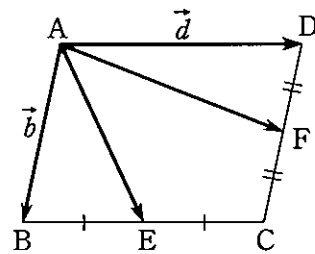
$$5\vec{x} = 4\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\vec{x} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

【平行四辺形とベクトルの分解】

10 平行四辺形 ABCD の辺 BC, CD の中点をそれぞれ E, F とする。また、 $\vec{AB} = \vec{b}, \vec{AD} = \vec{d}$  とする。

(1)  $\vec{AE}, \vec{AF}$  をそれぞれ  $\vec{b}, \vec{d}$  を用いて表せ。



$$\vec{AE} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}$$

$$\vec{AF} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{d}$$

(2)  $\vec{b}, \vec{d}$  をそれぞれ  $\vec{AE}, \vec{AF}$  を用いて表せ。

$$\begin{cases} 2\vec{AE} = 2\vec{b} + \vec{d} & \text{--- ①} \\ 2\vec{AF} = \vec{b} + 2\vec{d} & \text{--- ②} \end{cases}$$

$\vec{b}$  を消す

$\vec{d}$  を消す

$$\begin{aligned} 2\vec{AE} &= 2\vec{b} + \vec{d} & \text{--- ①} \\ -4\vec{AF} &= 2\vec{b} + 4\vec{d} & \text{--- ②} \times 2 \end{aligned}$$

$$-3\vec{d} = 2\vec{AE} - 4\vec{AF}$$

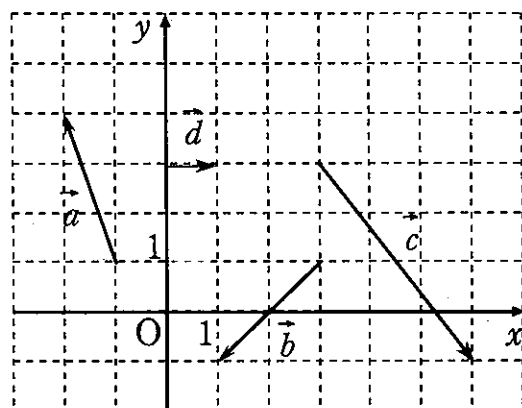
$$3\vec{b} = 4\vec{AE} - 2\vec{AF}$$

$$\vec{d} = -\frac{2}{3}\vec{AE} + \frac{4}{3}\vec{AF}$$

$$\vec{b} = \frac{4}{3}\vec{AE} - \frac{2}{3}\vec{AF}$$

【ベクトルの成分表示】

11 右の図のベクトル  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  を、それぞれ成分表示せよ。



$$\vec{a} = (-1, 3)$$

$$\vec{b} = (1, 0)$$

$$\vec{c} = (3, -4)$$

$$\vec{d} = (1, 0)$$

【成分表示によるベクトルの計算】

12  $\vec{a} = (3, -1), \vec{b} = (-4, 2)$  のとき、次のベクトルを求めよ。

(1)  $4\vec{a} - 3\vec{b}$

$$\begin{aligned} &= 4(3, -1) - 3(-4, 2) \\ &= (12, -4) + (12, -6) \\ &= (24, -10) \end{aligned}$$

(2)  $(2\vec{a} - 3\vec{b}) - (3\vec{a} + 5\vec{b})$

$$\begin{aligned} &= 2\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{a} - 5\vec{b} \\ &= -\vec{a} - 8\vec{b} \\ &= -(3, -1) - 8(-4, 2) \\ &= (-3, 1) + (32, -16) \\ &= (29, -15) \end{aligned}$$

【ベクトルの分解と成分】

13  $\vec{a} = (2, 1), \vec{b} = (-1, 3)$  とする。 $\vec{c} = (8, -3)$  を、適当な実数  $s, t$  を用いて  $s\vec{a} + t\vec{b}$  の形に表せ。

$$\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

$$\begin{aligned} (8, -3) &= s(2, 1) + t(-1, 3) \\ &= (2s, s) + (-t, 3t) \\ &= (2s - t, s + 3t) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2s - t = 8 & \text{--- ①} \\ s + 3t = -3 & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2s - t &= 8 & \text{--- ①} \\ -2s + 6t &= -6 & \text{--- ②} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -7t &= 14 \\ t &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{①} \Rightarrow t &= -2 \\ 2s + 2 &= 8 \\ 2s &= 6 \\ s &= 3 \end{aligned}$$

$$\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$$

【ベクトルの平行】

14 2つのベクトル  $\vec{a} = (4, x), \vec{b} = (-2, -1)$  が平行になるように、 $x$  の値を定めよ。

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \text{ より}$$

$$\vec{a} = k\vec{b}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= k\vec{b} \\ (4, x) &= k(-2, -1) \\ &= (-2k, -k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{①} \text{ より} \\ -2 &= -2 \end{aligned}$$

② 代入

$$\begin{cases} 4 = -2k & \text{--- ①} \\ x = -k & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$x = 2$$

【座標平面上の点とベクトル】

15 次の2点 A, B について、 $\vec{AB}$  を成分表示し、 $|\vec{AB}|$  を求めよ。

(1) A(5, 2), B(1, 6)

(2) A(-3, 4), B(2, 0)

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (1-5, 6-2) \\ &= (-4, 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (2+3, 0-4) \\ &= (5, -4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= \sqrt{16+16} \\ &= \sqrt{32} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= \sqrt{25+16} \\ &= \sqrt{41} \end{aligned}$$



【点の座標とベクトル】

16 4点 A(1, 1), B(4, 2), C(5, 4), D(x, y) を頂点とする四角形 ABCD が平行四辺形であるように, x, y の値を定めよ。

$$\vec{AD} = (x-1, y-1)$$

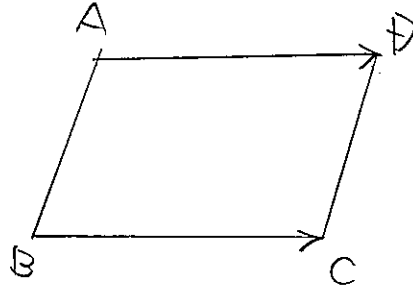
$$\vec{BC} = (1, 2)$$

$$\vec{AD} = \vec{BC}$$

$$(x-1, y-1) = (1, 2)$$

$$\begin{cases} x-1 = 1 \\ y-1 = 2 \end{cases}$$

$$\therefore x = 2, y = 3$$



【ベクトルの内積】

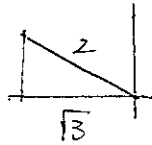
17  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とする。次の場合に内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  を求めよ。

(1)  $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=3, \theta=45^\circ$

(2)  $|\vec{a}|=6, |\vec{b}|=6, \theta=150^\circ$

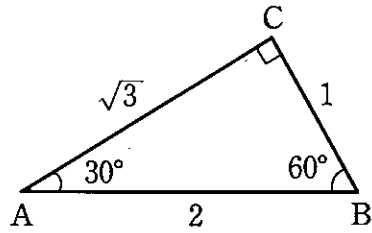
$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 4 \cdot 3 \cdot \cos 45^\circ \\ &= 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \underline{6\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 6 \cdot 6 \cdot \cos 150^\circ \\ &= 6 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \underline{-18\sqrt{3}} \end{aligned}$$



18 右の図の直角三角形 ABC において, 次の内積を求めよ。

(1)  $\vec{BA} \cdot \vec{AC} = |\vec{BA}| |\vec{AC}| \cos 150^\circ$   
 $= 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$   
 $= \underline{-3}$



(2)  $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = \underline{0}$

19 次のベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  について, 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  を求めよ。

(1)  $\vec{a}=(2, 5), \vec{b}=(3, -2)$

(2)  $\vec{a}=(1, \sqrt{3}), \vec{b}=(\sqrt{3}, 3)$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 6 - 10 \\ &= \underline{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \sqrt{3} + 3\sqrt{3} \\ &= \underline{4\sqrt{3}} \end{aligned}$$

【ベクトルのなす角】

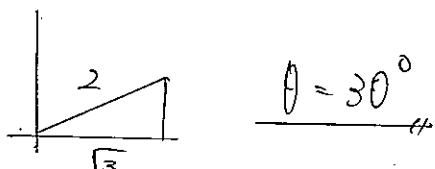
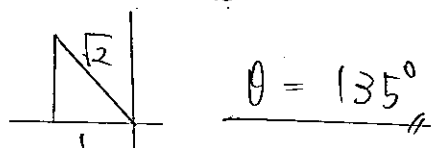
20 次の2つのベクトルのなす角を求めよ。

(1)  $\vec{a}=(2, 1), \vec{b}=(-3, 1)$

(2)  $\vec{a}=(1, \sqrt{3}), \vec{b}=(\sqrt{3}, 1)$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= -6 + 1 = -5 \\ |\vec{a}| &= \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \\ |\vec{b}| &= \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \\ \cos \theta &= \frac{-5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \\ |\vec{a}| &= \sqrt{1+3} = 2 \\ |\vec{b}| &= \sqrt{3+1} = 2 \\ \cos \theta &= \frac{2\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



(3)  $\vec{a}=(3, -1), \vec{b}=(2, 6)$

(4)  $\vec{a}=(-4, 2), \vec{b}=(2, -1)$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 6 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -8 - 2 = -10$$

$$\cos \theta = 0$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$$

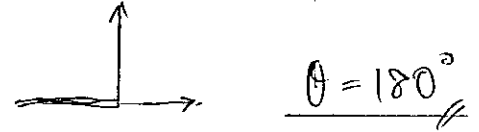
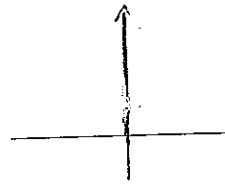
$$\theta = 90^\circ$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$= \frac{-10}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}$$

$$= -1$$



【ベクトルの成分と垂直条件】

21 次の2つのベクトルが垂直になるような x の値を求めよ。

(1)  $\vec{a}=(3, 6), \vec{b}=(x, 4)$

(2)  $\vec{a}=(x, -1), \vec{b}=(x, x+2)$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$3x + 24 = 0$$

$$x^2 - (x+2) = 0$$

$$3x = -24$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \underline{-8}$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x = \underline{-1, 2}$$

22 次の問いに答えよ。

(1)  $\vec{a}=(2, 1)$  に垂直で大きさが  $\sqrt{10}$  のベクトル  $\vec{b}$  を求めよ。

$$\vec{b} = (x, y) \text{ とおく}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$2x + y = 0 \quad \text{--- ①}$$

$$y = -2x \quad \text{--- ①'}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{10} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{10}$$

$$x^2 + y^2 = 10 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①' } \Rightarrow \text{②} \Rightarrow 5x^2 = 10$$

$$x^2 + (-2x)^2 = 10$$

$$5x^2 = 10$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$\text{①' } \Rightarrow \text{②} \Rightarrow$$

$$\vec{b} = (\sqrt{2}, -2\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$$



(2)  $\vec{a}=(4, 3)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

大きさは1

$$\vec{e}=(x, y) \text{ とおく}$$

$$\vec{a} \perp \vec{e} \Rightarrow$$

$$\vec{a} \cdot \vec{e} = 0$$

$$4x + 3y = 0 \quad \text{--- ①}$$

$$3y = -4x$$

$$y = -\frac{4}{3}x \quad \text{--- ①'}$$

$$|\vec{e}| = 1 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{--- ②}$$

$$x^2 = \frac{9}{25}$$

①'を②に代入

$$x = \pm \frac{3}{5}$$

$$x^2 + \left(-\frac{4}{3}x\right)^2 = 1$$

①'に代入

$$x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 1$$

$$\frac{25}{9}x^2 = 1$$

$$\vec{e} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right), \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

【内積とベクトルの大きさ】

23  $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2, \vec{a} \cdot \vec{b}=-3$ のとき、次の値を求めよ。

(1)  $|\vec{a} + \vec{b}|$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$= 9 - 6 + 4$$

$$= 7$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| > 0 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$$

(2)  $|\vec{a} - 2\vec{b}|$

$$|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$$

$$= 9 + 12 + 16$$

$$= 37$$

$$|\vec{a} - 2\vec{b}| > 0 \Rightarrow |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{37}$$

24  $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=2$ で、ベクトル $3\vec{a}-2\vec{b}, \vec{a}+4\vec{b}$ が垂直であるとする。

(1)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

$$(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 4\vec{b}) = 0$$

$$(3\vec{a} - 2\vec{b}) \perp (\vec{a} + 4\vec{b}) \Rightarrow$$

$$(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 4\vec{b}) = 0$$

$$3|\vec{a}|^2 + 10\vec{a} \cdot \vec{b} - 8|\vec{b}|^2 = 0$$

$$12 + 10\vec{a} \cdot \vec{b} - 32 = 0$$

$$10\vec{a} \cdot \vec{b} = 20$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$$

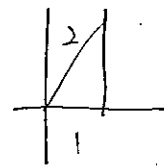
(2)  $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角 $\theta$ を求めよ。

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$= \frac{2}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^\circ$$



25  $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2, |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ。

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 7$$

$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 7$$

$$9 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 = 7$$

$$-2\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$$

(2)  $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角 $\theta$ を求めよ。

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$= \frac{3}{3 \cdot 2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^\circ$$

(3)  $|2\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

$$|2\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$= 36 - 12 + 4$$

$$= 28$$

$$|2\vec{a} - \vec{b}| > 0 \Rightarrow$$

$$|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$



【内積と三角形の面積】

26 3点  $O(0, 0)$ ,  $A(3, 1)$ ,  $B(2, 4)$  について、次のものを求めよ

(1)  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$

$$\vec{OA} = (3, 1)$$

$$\vec{OB} = (2, 4)$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 6 + 4 = 10$$

(2)  $\angle AOB$  の大きさ

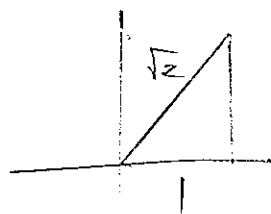
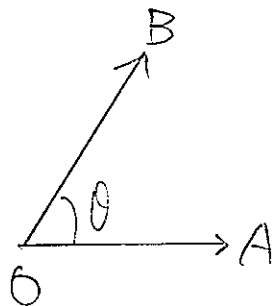
$$\cos \theta = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|}$$

$$\left( \begin{aligned} |\vec{OA}| &= \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \\ |\vec{OB}| &= \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \end{aligned} \right)$$

$$= \frac{10}{\sqrt{10} \sqrt{20}}$$

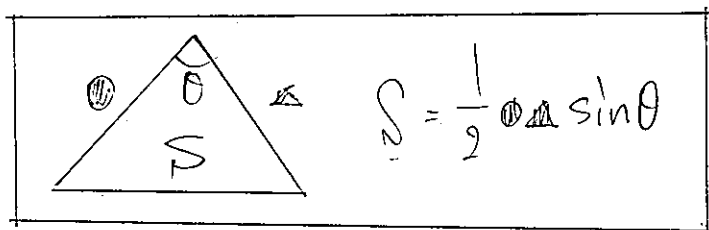
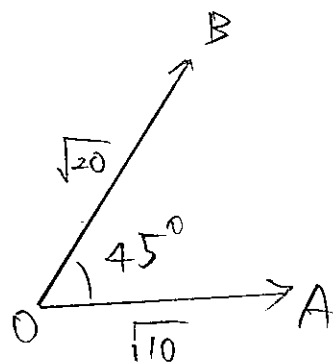
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = 45^\circ$$



(3)  $\triangle OAB$  の面積  $S$  を求めよ。

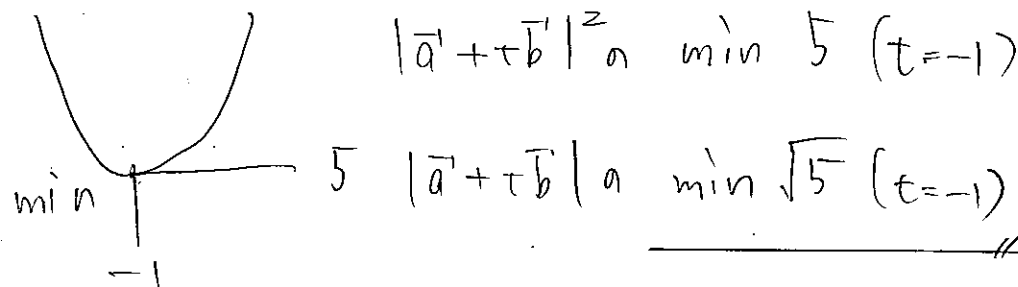
$$S = \frac{1}{2} |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \sin 45^\circ = 5$$



【ベクトルの大きさと最小値】

27  $|\vec{a}|=3$ ,  $|\vec{b}|=2$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b}=4$  のとき、 $|\vec{a}+t\vec{b}|$  の最小値とそのときの実数  $t$  の値を求めよ。

$$\begin{aligned} |\vec{a}+t\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2 |\vec{b}|^2 \\ &= 9 + 8t + 4t^2 \\ &= 4t^2 + 8t + 9 \\ &= 4(t^2 + 2t) + 9 \\ &= 4\{(t+1)^2 - 1\} + 9 \\ &= 4(t+1)^2 - 4 + 9 \\ &= 4(t+1)^2 + 5 \end{aligned}$$



【分点の位置ベクトル】

28 2点  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$  を結ぶ線分  $AB$  に対して、次のような点の位置ベクトルを求めよ。

(1) 2:3 に内分する点

(2) 3:1 に内分する点

$$\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{2+3} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

$$\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{3+1} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

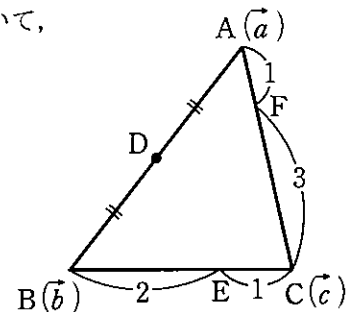
(3) 4:1 に外分する点

(4) 中点

$$\frac{-\vec{a}+4\vec{b}}{4-1} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$$

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

29 3点  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$ ,  $C(\vec{c})$  を頂点とする  $\triangle ABC$  において、辺  $AB$  の中点を  $D$ , 辺  $BC$ ,  $CA$  をそれぞれ 2:1, 3:1 に内分する点を  $E$ ,  $F$  とする。次のベクトルを  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  を用いて表せ。



$$\begin{aligned} (1) \vec{AC} &= \vec{OC} - \vec{OA} \\ &= \vec{c} - \vec{a} \end{aligned}$$

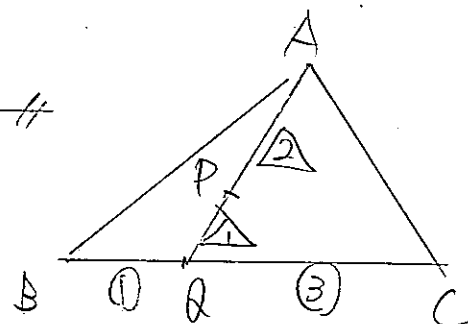
$$\begin{aligned} (2) \vec{BE} &= \vec{OE} - \vec{OB} \\ &= \frac{\vec{OB} + 2\vec{OC}}{2+1} - \vec{OB} \\ &= \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} - \vec{b} \\ &= -\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \vec{DF} &= \vec{OF} - \vec{OD} \\ &= \frac{3\vec{OA} + \vec{OC}}{1+3} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \\ &= \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} \\ &= \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} \end{aligned}$$

30  $\triangle ABC$  と点  $P$  に対して、 $2\vec{AP} + 3\vec{BP} + \vec{CP} = \vec{0}$  が成り立っている。

(1)  $\vec{AP}$  を  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  を用いて表せ。

$$\begin{aligned} 2\vec{AP} + 3(\vec{AP} - \vec{AB}) + (\vec{AP} - \vec{AC}) &= \vec{0} \\ 2\vec{AP} + 3\vec{AP} - 3\vec{AB} + \vec{AP} - \vec{AC} &= \vec{0} \\ 6\vec{AP} &= 3\vec{AB} + \vec{AC} \\ \vec{AP} &= \frac{3\vec{AB} + \vec{AC}}{6} \end{aligned}$$



(2) 点  $P$  はどのような位置にあるか。

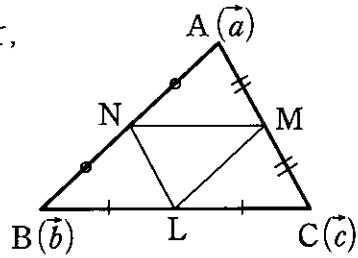
$$\begin{aligned} \vec{AP} &= \frac{1}{6} \cdot \frac{3\vec{AB} + \vec{AC}}{4} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3\vec{AB} + \vec{AC}}{1+3} \end{aligned}$$

BC を 1:3 に内分する点 E とすると、AE を 2:1 に内分する点 P である。



【重心の位置ベクトル】

31 3点  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$ ,  $C(\vec{c})$  を頂点とする  $\triangle ABC$  において、辺  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  の中点を、それぞれ  $L$ ,  $M$ ,  $N$  とする。また、 $\triangle LMN$  の重心を  $G'$  とする。



(1) 点  $G'$  の位置ベクトル  $\vec{g}'$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  を用いて表せ。

$$\vec{OG}' = \frac{\vec{OL} + \vec{OM} + \vec{ON}}{3}$$

$$\left( \vec{OL} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}, \vec{OM} = \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2}, \vec{ON} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \right)$$

$$= \frac{\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2} + \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}}{3}$$

$$= \frac{2\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}}{6} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

(2) 等式  $\vec{AL} + \vec{BM} + \vec{CN} = \vec{0}$  が成り立つことを示せ。

$$\vec{AL} = \vec{OL} - \vec{OA} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \vec{a} = \frac{\vec{b} + \vec{c} - 2\vec{a}}{2}$$

$$\vec{BM} = \vec{OM} - \vec{OB} = \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2} - \vec{b} = \frac{\vec{c} + \vec{a} - 2\vec{b}}{2}$$

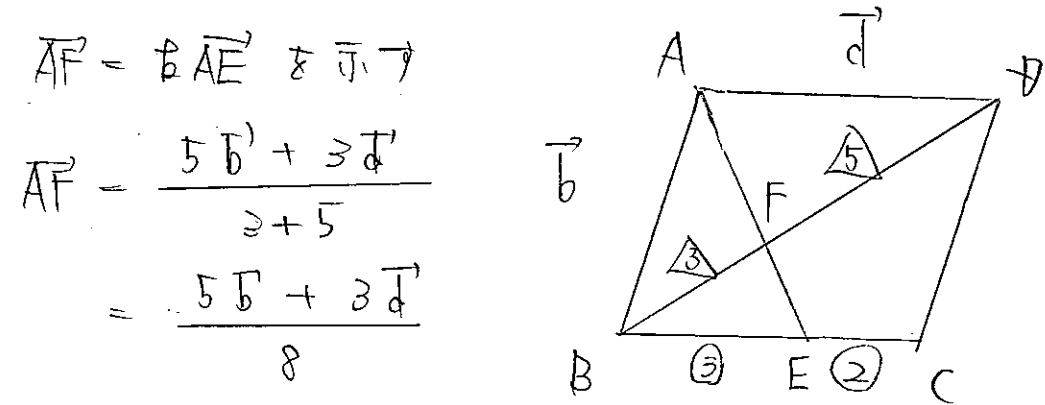
$$\vec{CN} = \vec{ON} - \vec{OC} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \vec{c} = \frac{\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}}{2}$$

$$(\text{右辺}) = \frac{\vec{b} + \vec{c} - 2\vec{a}}{2} + \frac{\vec{c} + \vec{a} - 2\vec{b}}{2} + \frac{\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}}{2}$$

$$= \vec{0} = (\text{左辺})$$

【一直線上にある3点】

32 平行四辺形  $ABCD$  において、辺  $BC$  を  $3:2$  に内分する点を  $E$ , 対角線  $BD$  を  $3:5$  に内分する点を  $F$  とする。このとき、3点  $A$ ,  $F$ ,  $E$  は一直線上にあることを証明せよ。



$$\vec{AF} = k \vec{AE} \text{ を示す}$$

$$\vec{AF} = \frac{5\vec{b}' + 3\vec{d}'}{8}$$

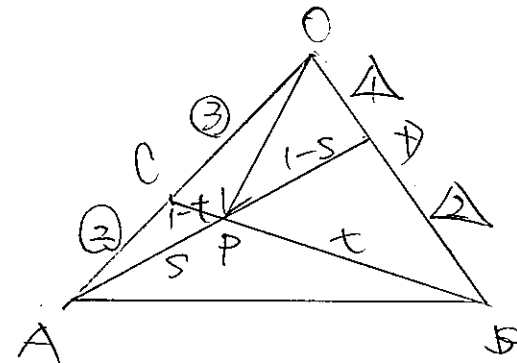
$$\vec{AE} = \frac{2\vec{b}' + 3\vec{d}'}{5}$$

$$5 \Rightarrow \vec{AF} = \frac{5}{8} \vec{AE}$$

従って、3点  $A, F, E$  は一直線上

【交点の位置ベクトル[1]】

33  $\triangle OAB$  において、辺  $OA$  を  $3:2$  に内分する点を  $C$ , 辺  $OB$  を  $1:2$  に内分する点を  $D$  とし、線分  $AD$  と線分  $BC$  の交点を  $P$  とする。 $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$  とするとき、 $\vec{OP}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ。



$\triangle OAD$  において

$$\vec{OP} = (1-s)\vec{OA} + s\vec{OD}$$

$$= (1-s)\vec{a} + \frac{1}{3}s\vec{b}$$

$\triangle OCB$  において

$$\vec{OP} = t\vec{OC} + (1-t)\vec{OB}$$

$$= \frac{3}{5}t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \quad \text{--- ③}$$

$\vec{a}, \vec{b}$  は一次独立なので

$$\begin{cases} 1-s = \frac{3}{5}t \\ \frac{1}{3}s = 1-t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5-5s = 3t & \text{--- ①} \\ s = 3-3t & \text{--- ②} \end{cases}$$

②を①に代入

$$5-5(3-3t) = 3t$$

$$5-15+15t = 3t$$

$$12t = 10$$

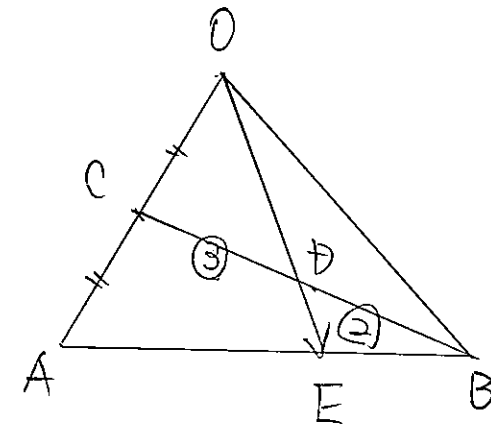
$$t = \frac{5}{6}$$

②に代入

$$\vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$

【交点の位置ベクトル[2]】

34  $\triangle OAB$  において、辺  $OA$  の中点を  $C$ , 線分  $BC$  を  $2:3$  に内分する点を  $D$  とし、直線  $OD$  と辺  $AB$  の交点を  $E$  とする。 $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$  とするとき、 $\vec{OE}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ。



3点  $O, D, E$  は一直線上

$$\vec{OE} = k \vec{OD}$$

$$= k \left( \frac{2\vec{OC} + 3\vec{OB}}{3+2} \right)$$

$$= k \left( \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \vec{OA} + \frac{3}{5} \vec{OB} \right)$$

$$= k \left( \frac{1}{5} \vec{a} + \frac{3}{5} \vec{b} \right)$$

$$= \frac{1}{5} k \vec{a} + \frac{3}{5} k \vec{b} \quad \text{--- ①}$$

点  $E$  は線分  $AB$  上にあるので

$$\frac{1}{5}k + \frac{3}{5}k = 1$$

$$\frac{4}{5}k = 1$$

$$k = \frac{5}{4}$$

①に代入

$$\vec{OE} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$



【直線と円の方程式】

35  $\vec{a}=(3, 2), \vec{b}=(-1, 2)$  のとき,  $\vec{p}=(x, y)$  として, 次のベクトル方程式で表される図形を,  $x$  と  $y$  の方程式で表せ.

(1)  $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$

$$\begin{aligned} (x, y) &= (3, 2) + t(-1, 2) \\ &= (3, 2) + (-t, 2t) \\ &= (3-t, 2+2t) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 3-t & \text{--- ①} \\ y = 2+2t & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$t = 3-x \quad \text{--- ①'}$$

$$\begin{aligned} \text{①'を②に代入} \quad y &= 2+2(3-x) \\ 2x+y-8 &= 0 \end{aligned}$$

(2)  $(\vec{p}-\vec{a}) \cdot \vec{b} = 0$

$$\begin{aligned} \vec{p}-\vec{a} &= (x, y) - (3, 2) \\ &= (x-3, y-2) \end{aligned}$$

$$\vec{b} = (-1, 2)$$

$$(\vec{p}-\vec{a}) \cdot \vec{b} = 0 \text{ より}$$

$$-x+3+2y-4=0$$

$$2y = x+1$$

$$\underline{x-2y+1=0}$$

$$\begin{aligned} \vec{p} &= (0, \Delta) \quad \vec{b} = (0, \Delta) \\ \vec{a} &= \underbrace{00} + \underbrace{\Delta\Delta} \\ &\text{x成分は0, y成分は}\Delta \end{aligned}$$

(3)  $|\vec{p}-\vec{a}|=2$

$$\vec{p}-\vec{a} = (x-3, y-2) \quad (\text{②より})$$

$$|\vec{p}-\vec{a}| = 2 \text{ より}$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 2$$

$$\underline{(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4}$$

$$\begin{aligned} \vec{p} &= (0, \Delta) \\ |\vec{a}| &= \sqrt{0^2 + \Delta^2} \end{aligned}$$

(4)  $(\vec{p}-\vec{a}) \cdot (\vec{p}-\vec{b}) = 0$

$$\vec{p}-\vec{a} = (x-3, y-2) \quad (\text{②より})$$

$$\vec{p}-\vec{b} = (x, y) - (-1, 2)$$

$$= (x+1, y-2)$$

$$(\vec{p}-\vec{a}) \cdot (\vec{p}-\vec{b}) = 0 \text{ より}$$

$$(x-3)(x+1) + (y-2)(y-2) = 0$$

$$x^2-2x-3 + (y-2)^2 = 0$$

$$(x-1)^2-1-3 + (y-2)^2 = 0$$

$$\underline{(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4}$$

【直線のベクトル方程式】

36 次の条件を満たす直線の方程式を, ベクトルを用いて求めよ.

(1) A(-2, 3) を通り, ベクトル  $\vec{d}=(2, 1)$  に平行

P(x, y) とする

$$\boxed{\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{d}}$$

$$(x, y) = (-2, 3) + t(2, 1)$$

$$= (-2+2t, 3+t)$$

②'を①に代入

$$y = -2 + 2(y-3)$$

$$\begin{cases} x = -2+2t & \text{--- ①} \\ y = 3+t & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$x = -2 + 2y - 6$$

$$t = y-3 \quad \text{--- ②'}$$

$$\underline{x-2y+8=0}$$

(2) 2点 A(-1, 2), B(3, 1) を通る

P(x, y) とする

$$\vec{AB} = (4, -1)$$

$$\boxed{\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{AB}}$$

$$(x, y) = (-1, 2) + t(4, -1)$$

$$= (4t-1, -t+2)$$

$$\begin{cases} x = 4t-1 & \text{--- ①} \\ y = -t+2 & \text{--- ②} \end{cases}$$

②'を①に代入

$$x = 4(2-y) - 1$$

$$t = 2-y \quad \text{--- ②'}$$

$$x = 8 - 4y - 1$$

$$\underline{x+4y-7=0}$$

37 次の条件を満たす直線の方程式を, ベクトルを用いて求めよ.

(1) A(3, 1) を通り, ベクトル  $\vec{n}=(2, 3)$  に垂直

P(x, y) とする

$$\vec{AP} = (x-3, y-1)$$

$$\boxed{\vec{AP} \cdot \vec{n} = 0}$$

$$2(x-3) + 3(y-1) = 0$$

$$2x-6+3y-3=0$$

$$\underline{2x+3y-9=0}$$

(2) 3点 A(3, 1), B(-2, 2), C(1, -5) について, 点 C を通り, 直線 AB に垂直

P(x, y) とする

$$\vec{AB} = (-5, 1)$$

$$\vec{CP} = (x-1, y+5)$$

$$\boxed{\vec{AB} \cdot \vec{CP} = 0}$$

$$-5(x-1) + y+5 = 0$$

$$-5x+5+y+5=0$$

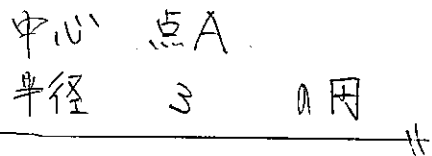
$$\underline{5x-y-10=0}$$



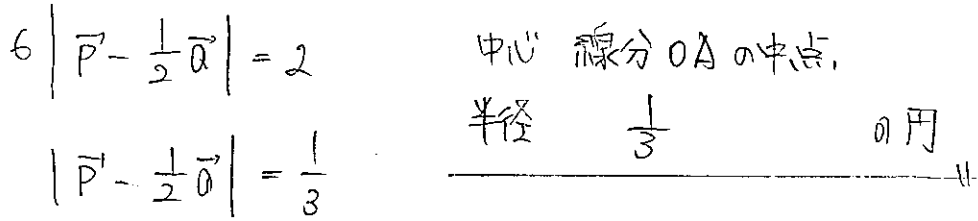
【円のベクトル方程式】

38 定点  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$  と動点  $P(\vec{p})$  について、次のベクトル方程式で表される点  $P$  はどのような図形上を動くか。

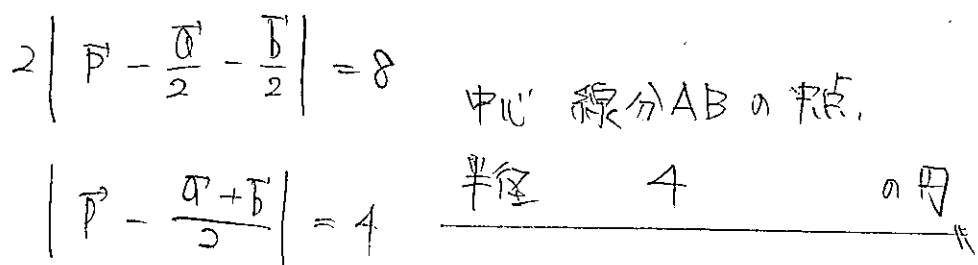
(1)  $|\vec{p}-\vec{a}|=3$



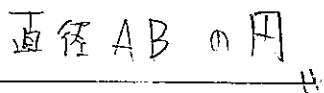
(2)  $|\vec{p}-3\vec{a}|=2$



(3)  $|2\vec{p}-\vec{a}-\vec{b}|=8$



(4)  $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$



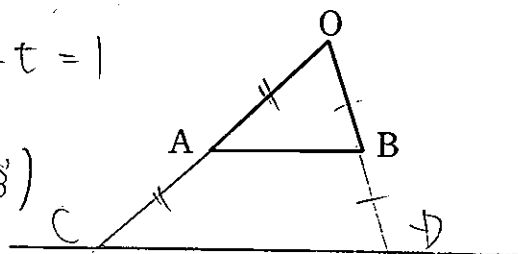
【終点の存在範囲】

39  $\triangle OAB$  において、次の式を満たす点  $P$  の存在範囲を求めよ。

(1)  $\vec{OP}=s\vec{OA}+t\vec{OB}$ ,  $s+t=2$

$\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}t=1$

$\vec{OP}=\frac{1}{2}s(2\vec{OA})+\frac{1}{2}t(2\vec{OB})$

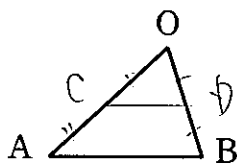


直線  $CD$

(2)  $\vec{OP}=s\vec{OA}+t\vec{OB}$ ,  $s+t=\frac{1}{2}$ ,  $s\geq 0, t\geq 0$

$2s+2t=1$

$\vec{OP}=2s(\frac{1}{2}\vec{OA})+2t(\frac{1}{2}\vec{OB})$

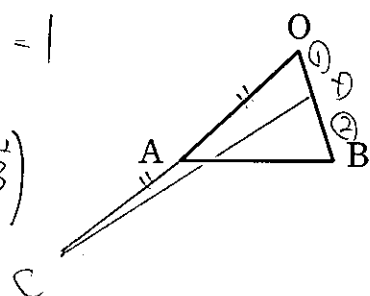


線分  $CD$

(3)  $\vec{OP}=s\vec{OA}+t\vec{OB}$ ,  $s+6t=2$ ,  $s\geq 0, t\geq 0$

$\frac{1}{2}s+3t=1$

$\vec{OP}=\frac{1}{2}s(2\vec{OA})+3t(\frac{1}{3}\vec{OB})$



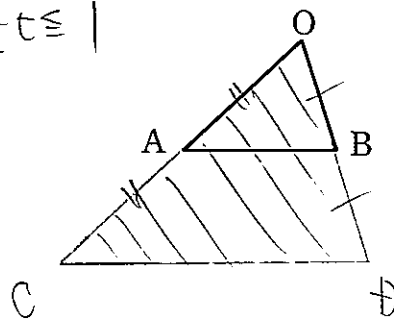
線分  $CD$

40  $\triangle OAB$  において、次の式を満たす点  $P$  の存在範囲を求めよ。

(1)  $\vec{OP}=s\vec{OA}+t\vec{OB}$ ,  $0\leq s+t\leq 2, s\geq 0, t\geq 0$

$0\leq \frac{1}{2}s+\frac{1}{2}t\leq 1$

$\vec{OP}=\frac{1}{2}s(2\vec{OA})+\frac{1}{2}t(2\vec{OB})$

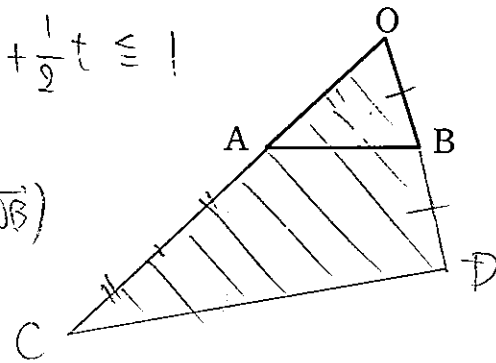


$\triangle OCD$  の周および内部

(2)  $\vec{OP}=s\vec{OA}+t\vec{OB}$ ,  $0\leq 2s+3t\leq 6, s\geq 0, t\geq 0$

$0\leq \frac{1}{3}s+\frac{1}{2}t\leq 1$

$\vec{OP}=\frac{1}{3}s(3\vec{OA})+\frac{1}{2}t(2\vec{OB})$



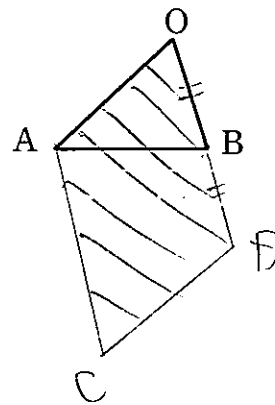
$\triangle OCD$  の周および内部

41  $\triangle OAB$  において、次の式を満たす点  $P$  の存在範囲を求めよ。

(1)  $\vec{OP}=s\vec{OA}+t\vec{OB}$ ,  $0\leq s\leq 1, 0\leq t\leq 2$

$0\leq \frac{1}{2}t\leq 1$

$\vec{OP}=s\vec{OA}+\frac{1}{2}t(2\vec{OB})$

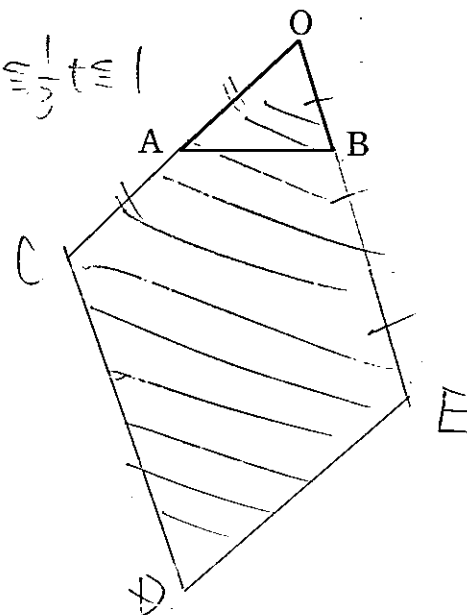


平行四辺形  $OACD$  の周および内部

(2)  $\vec{OP}=s\vec{OA}+t\vec{OB}$ ,  $0\leq s\leq 2, 0\leq t\leq 3$

$0\leq \frac{1}{2}s\leq 1, 0\leq \frac{1}{3}t\leq 1$

$\vec{OP}=\frac{1}{2}s(2\vec{OA})+\frac{1}{3}t(3\vec{OB})$



平行四辺形  $OCE$  の周および内部