

極限①

1 【無限数列の収束・発散】

次の数列の極限値を調べよ。

$$(1) -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^n}{n} \quad \underline{0}$$

$$(2) \cos \pi, \cos 3\pi, \cos 5\pi, \dots, \cos(2n-1)\pi, \dots \quad \underline{-1}$$

2

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (2n^3 - n^2) = \underline{\infty}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - 3n^2) = \underline{-\infty}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - n^3) = \underline{-\infty}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{2}{n}} = \underline{\frac{2}{3}}$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}} = \underline{0}$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-2n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{2 + \frac{1}{n}} = \underline{\infty}$$

3

次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+7+10+\dots+(3n+1)}{5+8+11+\dots+(3n+2)}$$

← 初4, 公差3の等差数列の和
← 初5, 公差3の等差数列の和

$$\text{分子} = \frac{n}{2} \{8 + (n-1) \cdot 3\} = \frac{n}{2} (3n+5)$$

$$\text{分母} = \frac{n}{2} \{10 + (n-1) \cdot 3\} = \frac{n}{2} (3n+7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{3n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{n}}{3 + \frac{7}{n}}$$

$$= \underline{1}$$

4

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \underline{0}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-n} - n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2-n} - n)(\sqrt{n^2-n} + n)}{\sqrt{n^2-n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{\sqrt{n^2-n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}} + 1} = \underline{-\frac{1}{2}}$$

5 【はさみうちの定理】

θ を定数とするとき、次の極限値を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\theta}{6} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \frac{n\theta}{6} \leq 1$$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \cos \frac{n\theta}{6} \leq \frac{1}{n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\theta}{6} = \underline{0}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n\theta}{n^2+1}$$

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$0 \leq \sin^2 n\theta \leq 1$$

$$0 \leq \frac{\sin^2 n\theta}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n\theta}{n^2+1} = \underline{0}$$

6 【無限等比数列】

第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

$$(1) (\sqrt{3})^n \quad \underline{\infty}$$

$$(2) \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \underline{0}$$

$$(3) \left(-\frac{4}{3}\right)^n \quad \underline{\text{振動}}$$

$$(4) 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \quad \underline{0}$$

7

数列 $\{(x^2+2x)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また、そのときの極限値を求めよ。

$$-1 < x^2+2x \leq 1 \quad x^2+2x-1=0$$

$$-1 < x^2+2x \quad x^2+2x \leq 1 \quad x = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$x^2+2x+1 > 0 \quad x^2+2x-1 \leq 0 \quad x = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$(x+1)^2 > 0 \quad -1-\sqrt{2} \leq x \leq -1+\sqrt{2} \quad \text{②}$$

$$x = -1 \text{ 以外の } \quad \text{①②より}$$

$$\text{すべての実数} \quad \text{①} \quad -1-\sqrt{2} \leq x < -1$$

$$-1 < x \leq -1+\sqrt{2}$$

8

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \underline{1}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{3^n - 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \underline{0}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 2^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{4}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\} = \underline{\infty}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} (5^n - 4^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 5^n \left\{ 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n \right\} = \underline{\infty}$$

9

数列 $\left\{ \frac{1-r^n}{1+r^n} \right\}$ の極限を、次の各場合について求めよ。

(1) $r > 1$

(2) $r = 1$

$$\frac{\frac{1}{r^n} - 1}{\frac{1}{r^n} + 1} \xrightarrow{\infty} -1 //$$

$$\frac{0}{0} //$$

(3) $|r| < 1$

(4) $r < -1$

$$\frac{1}{r^n} //$$

$$\frac{\frac{1}{r^n} - 1}{\frac{1}{r^n} + 1} \xrightarrow{\infty} -1 //$$

10

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ。

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$x = -\frac{1}{3}x + 1$$

$$a_{n+1} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3} \left(a_n - \frac{3}{4} \right)$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$a_n - \frac{3}{4} \text{ は初 } a_1 - \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \text{ の等比数列}$$

$$\text{公比 } -\frac{1}{3}$$

$$a_n - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

$$a_n = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} + \frac{3}{4} \xrightarrow{\infty} \frac{3}{4} //$$

11 【無限級数】

次のような無限級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$S_n = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$\xrightarrow{\infty} \frac{3}{4} //$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})$$

$$S_n = (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n-3}) + (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})$$

$$\xrightarrow{\infty} \infty //$$

$$\therefore \text{発散} //$$

12 【無限等比級数】

次のような無限等比級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。

(1) 初項 1, 公比 $\frac{1}{2}$

(2) 初項 $\sqrt{2}$, 公比 $\sqrt{2}$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 //$$

$$\text{発散} //$$

(3) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots$

初 1 公比 $-\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} //$$

(5) $(\sqrt{2}+1)+1+(\sqrt{2}-1)+\dots$

初 $\sqrt{2}+1$ 公比 $\sqrt{2}-1$

$$\frac{\sqrt{2}+1}{1 - (\sqrt{2}-1)} = \frac{(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}+4}{2} //$$

13

次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。

(1) $1 + (2-x) + (2-x)^2 + \dots$

$$|2-x| < 1 \quad -3 < -x < -1$$

$$-1 < 2-x < 1 \quad 1 < x < 3 //$$

(2) $x + x(2-x) + x(2-x)^2 + \dots$

$$x=0 \text{ 又は } 0 \text{ に収束}$$

$$|2-x| < 1 \quad -3 < -x < -1 \quad \therefore$$

$$-1 < 2-x < 1 \quad 1 < x < 3 \quad x=0, 1 < x < 3 //$$

14

座標平面上で、点 P が原点 O から正の向きに 1 だけ進み、そこから負の向きに $\frac{1}{2^2}$, そこから正の向

きに $\frac{1}{2^4}$, そこから負の向きに $\frac{1}{2^6}$ と進む。以下、このような運動を限りなく続けるとき、点 P の

極限の位置の座標を求めよ。

$$1, 1 - \frac{1}{2^2}, 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} //$$

15

次の循環小数を分数で表せ。

(1) $0.\dot{6}$

$$= 0.66666 \dots$$

$$= 0.6 + 0.06 + 0.006 + \dots$$

初 0.6 公比 0.1

$$\frac{0.6}{1 - 0.1} = \frac{0.6}{0.9}$$

$$= \frac{2}{3} //$$

(2) $0.2\dot{3}4$

$$0.2343434 \dots$$

$$= 0.2 + 0.034 + 0.0034 + \dots$$

初 0.034 公比 0.01

$$= 0.2 + \frac{0.034}{1 - 0.01}$$

$$= 0.2 + \frac{0.034}{0.99}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{34}{9990} = \frac{116}{495} //$$

(3) $0.4\dot{7}0\dot{2}$

$$\begin{aligned}
 0.4\dot{7}0\dot{2} &= 0.4 + \frac{0.0702}{1-0.001} \\
 &= 0.4 + \frac{0.0702}{0.999} \\
 &= \frac{4}{10} + \frac{702}{9990} \\
 &= \frac{3996}{9990} + \frac{702}{9990} \\
 &= \frac{4698}{9990} \\
 &= \frac{87}{185}
 \end{aligned}$$

16

次の無限級数の和を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{2}{3^n} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{4} \right)^n + 2 \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} \\
 &= \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} + 2 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(\frac{3}{4} \right)^n \right\} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 1 - 3 = -2
 \end{aligned}$$

17

次の無限級数は発散することを示せ。

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{6} + \frac{5}{9} + \frac{7}{12} + \dots + \frac{2n-1}{3n} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が収束} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

逆は必ずしも成り立たない。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は発散}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{3} = \frac{2}{3} \neq 0 \therefore \text{発散}$$

18 【 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ の値】

次の極限を求めよ。(4) の a は 0 でない定数とする。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x - 1) = -2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -2} (x-3)(x+2) = 0$$

$$\begin{aligned}
 (3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-2)(x-1)} \\
 &= \frac{3}{-1} = -3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{x}{a(a+x)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{a(a+x)} = \frac{1}{a^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} + 2 = 4
 \end{aligned}$$

19 【極限と係数決定】

次の等式が成り立つように、定数 a, b の値を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x} + b}{x-2} = -1 \\
 \lim_{x \rightarrow 2} (a\sqrt{x} + b) = 0 \quad \text{よって} \\
 \begin{cases} a + b = 0 \\ b = -\sqrt{2}a \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x} - \sqrt{2}a}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(\sqrt{x} - \sqrt{2})}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \\
 &= \frac{a}{2\sqrt{2}} = -1 \\
 \therefore a = -2\sqrt{2} \quad b = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a\sqrt{x+4} + b}{x} = 1 \\
 \lim_{x \rightarrow 0} (a\sqrt{x+4} + b) = 0 \quad \text{よって} \\
 \begin{cases} 2a + b = 0 \\ b = -2a \end{cases}
 \end{aligned}$$

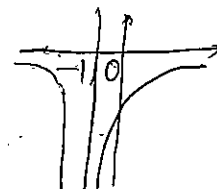
$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a\sqrt{x+4} - 2a}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt{x+4} + 2} \\
 &= \frac{a}{4} = 1 \quad a = 4, b = -8
 \end{aligned}$$

20 【極限が有限でない場合】

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -1} \left\{ -\frac{1}{(x+1)^2} \right\} = -\infty$$



極限④

21 【片側からの極限】

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$ $x > 0$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x}$$

$$= 1 \neq$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$ $x < 0$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x}$$

$$= -1 \neq$$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{|x-1|}$ $x > 1$
 $x-1 > 0$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1)$$

$$= 2 \neq$$

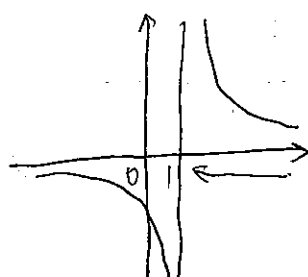
(4) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{|x-1|}$ $x < 1$
 $x-1 < 0$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1)$$

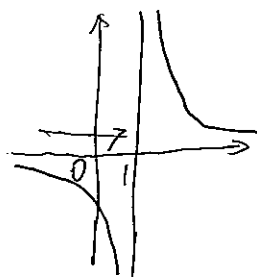
$$= -2 \neq$$

(5) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$



$$= \infty \neq$$

(6) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$



$$= -\infty \neq$$

22 【 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ の値】

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$

$$= 0 \neq$$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^2}$

$$= 0 \neq$$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 2x)$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right) = \infty \neq$$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3x)$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 + \frac{3}{x}\right) = \infty \neq$$

23 【分関数の極限】

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{4x+3}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{4 + \frac{3}{x}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq$$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+4}{2x^2-3x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{4}{x^2}}{2 - \frac{3}{x}} = \frac{5}{2} \neq$$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-x^2}{3x+2}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x} - x}{3 + \frac{2}{x}} = -\infty \neq$$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x}{x^2-4x+1}$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0 \neq$$

24 【無理関数の極限】

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x} - x)$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x} - x)(\sqrt{x^2+2x} + x)}{\sqrt{x^2+2x} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 1} = \frac{1}{2} \neq$$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2+2x} + 2x)$

$$x = -t \text{ とおく}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{4t^2-2t} - 2t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4t^2-2t} - 2t)(\sqrt{4t^2-2t} + 2t)}{\sqrt{4t^2-2t} + 2t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2t}{\sqrt{4t^2-2t} + 2t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{4-\frac{2}{t}} + 2}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{4} + 2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \neq$$

25 【指数・対数関数の極限】

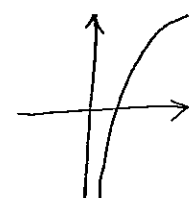
次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$$= 0 \neq$$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 x$

$$= \infty \neq$$



(3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{0.5} x$

$$= \infty \neq$$



(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-3x}$

$$= 0 \neq$$

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-2x}$

$$= 0 \neq$$

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4x-1}{x+2}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}}$$

$$= 2 \neq$$

26 【三角関数の極限】

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x}$

$$= 0 \neq$$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x}$

$$= 1 \neq$$

(3) $\lim_{x \rightarrow \pi} \tan x$

$$= 0 \neq$$

27

次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$

$$0 \leq \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1$$

$$0 \leq |x| \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \left| x \cos \frac{1}{x} \right| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x}$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$(x \rightarrow -\infty \text{ とき } x < 0)$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

28

次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2x}{3x}$$

$$= \frac{2}{3}$$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{3x}{5x}$$

$$= \frac{3}{5}$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= 1$$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$= \frac{1}{2}$$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (\cos x + 1)}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}$$

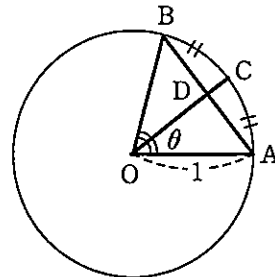
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (\cos x + 1)}{\cos^2 x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (\cos x + 1)}{-\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -(\cos x + 1) = -2$$

29

半径1の円Oの周上に中心角 θ ラジアン、の弧ABをとり、弧ABを2等分する点をCとする。また、線分OCと弦ABの交点をDとする。弧ABの長さを $\widehat{AB}$ で表すとき、極限 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{CD}{\widehat{AB}^2}$ を求めよ。



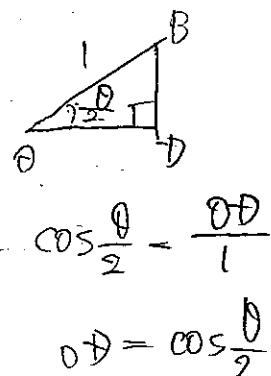
$$\widehat{AB} = 2\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{\theta}{2\pi} = \theta$$

$$CD = OC - OD = 1 - \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\theta^2 (1 + \cos \frac{\theta}{2})}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{(\frac{\theta}{2})^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$



30 【関数の連続性】

次の関数 $f(x)$ が、 $x=0$ で連続であるか不連続であるかを調べよ。

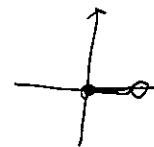
(1) $f(x) = x[x]$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x[x] = 0 \cdot 0 = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} x[x] = 0 \cdot (-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x[x] = f(0) \therefore \text{連続}$$



(2) $f(x) = (x+1)[x]$

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x+1)[x] = (0+1) \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} (x+1)[x] = (0+1) \cdot (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} (x+1)[x] = (0+1) \cdot (-1) = -1$$

$$\therefore \text{不連続}$$

(3) $f(x) = \sqrt{x}$

$$(x \geq 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = f(0)$$

$$f(0) = 0$$

$$\therefore \text{連続}$$

31 【区間における連続】

次の関数が連続である区間を求めよ。

(1) $f(x) = \sqrt{1-x}$

$$1-x \geq 0$$

$$x \leq 1$$

$$(-\infty, 1]$$

(2) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

$$= \frac{x+1}{(x-2)(x-1)}$$

$$x \neq 1, 2$$

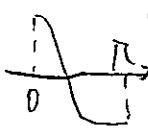
$$(-\infty, 1), (1, 2), (2, \infty)$$

32 【区間における連続】

次の区間における関数 $f(x) = \cos x$ の最大値、最小値について調べよ。

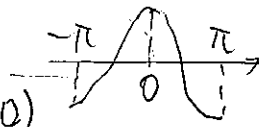
(1) $[0, \pi]$

$$\begin{aligned} \text{Max } 1 & (x=0) \\ \text{Min } -1 & (x=\pi) \end{aligned}$$



(2) $[-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} \text{Max } 1 & (x=0) \\ \text{Min } -1 & (x=-\pi, \pi) \end{aligned}$$



33 【区間における連続】

次の方程式は、() 内の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことを示せ。

(1) $x - \cos x = 0$ ($0 < x < \pi$)

$$f(x) = x - \cos x$$

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(\pi) = \pi - 1 > 0$$

$\therefore$ 連続である

(2) $2^x - 3x = 0$ ($3 < x < 4$)

$$f(x) = 2^x - 3x$$

$$f(3) = 8 - 9 = -1 < 0$$

$$f(4) = 16 - 12 = 4 > 0$$

$\therefore$ 連続である