

微分法①

1 【微分係数】

関数 $f(x) = \sqrt{x}$ について、 $x=2$ における微分係数を定義に従って求めよ。

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

2 【接線の傾き】

関数 $f(x) = \sqrt{x}$ のグラフの点 $(3, \sqrt{3})$ における接線の傾きを求めよ。

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned} \quad \therefore f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

3 【微分可能と連続】

関数 $f(x) = |x^2 - 1|$ は $x=1$ で微分可能でないことを示せ。

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|(1+h)^2 - 1| - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|2h + h^2|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h||h+2|}{h} \\ &\quad (h \rightarrow +0 \quad |h| = h) \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} |h+2| \\ &= 2 \\ &\lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h||h+2|}{h} \\ &\quad (h \rightarrow -0 \quad |h| = -h) \\ &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h|h+2|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow -0} -|h+2| \\ &= -2 \end{aligned}$$

$\therefore x=1$ で微分可能でない

4 【導関数の定義】

次の関数の導関数を、定義に従って求めよ。

(1) $f(x) = \frac{1}{2x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2(x+h)} - \frac{1}{2x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \cdot \frac{x - (x+h)}{x(x+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2x(x+h)} = -\frac{1}{2x^2} \end{aligned}$$

(2) $f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

5 【導関数】

次の関数を微分せよ。

(1) $y = (x+1)(x^3 - 4x)$

$$\begin{aligned} y' &= (x^3 - 4x)' + (x+1)'(x^3 - 4x) \\ &= 3x^2 - 4 + (1)(3x^2 - 4) \\ &= 3x^2 - 4 + 3x^2 - 4 \\ &= 6x^2 - 8 \end{aligned}$$

(2) $y = (3x^2 - 2)(x^2 + x + 1)$

$$\begin{aligned} y' &= 6x(x^2 + x + 1) + (3x^2 - 2)'(x^2 + x + 1) \\ &= 6x^3 + 6x^2 + 6x + 6x^3 + 6x^2 - 4x - 2 \\ &= 12x^3 + 12x^2 + 2x - 2 \end{aligned}$$

6

(1) $y = (x+2)(x-1)(x-5)$

$$\begin{aligned} y' &= (x-1)'(x-5) + (x+2)'(x-5) + (x+2)(x-1)' \\ &= 1(x-5) + 1(x-5) + (x+2)(1) \\ &= x - 5 + x - 5 + x + 2 \\ &= 3x - 8 \end{aligned}$$

(2) $y = (x^2 - 1)(x+2)(2x-1)$

$$\begin{aligned} y' &= 2x(x+2)(2x-1) + (x^2-1)'(2x-1) + (x^2-1)(x+2)' \\ &= 2x(2x^2 + 3x - 2) + (2x^3 - x^2 - 2x + 1) \\ &\quad + 2(x^3 + 2x^2 - x - 2) \\ &= 8x^3 + 9x^2 - 8x - 3 \end{aligned}$$

7

次の関数を微分せよ。

$$(1) y = \frac{1}{2x-3}$$

$$y' = \frac{(2x-3)'}{(2x-3)^2}$$

$$= \frac{2}{(2x-3)^2} //$$

$$(2) y = \frac{x^2}{x+3}$$

$$y' = \frac{2x(x+3) - x^2 \cdot 1}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 6x - x^2}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2} //$$

$$(3) y = \frac{2x-1}{x^2+1}$$

$$y' = \frac{2(x^2+1) - (2x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2 - 4x^2 + 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 + 2x + 2}{(x^2+1)^2} //$$

8

次の関数を微分せよ。

$$(1) y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$y' = -x^{-2}$$

$$= -\frac{1}{x^2} //$$

$$(2) y = -\frac{4}{x^2} = -4x^{-2}$$

$$y' = 8x^{-3}$$

$$= \frac{8}{x^3} //$$

$$(3) y = \frac{1}{3x^3} = \frac{1}{3}x^{-3}$$

$$y' = -x^{-4}$$

$$= -\frac{1}{x^4} //$$

9

次の関数を微分せよ。

$$(1) y = (3x+1)^4$$

$$y' = 4 \cdot 3(3x+1)^3$$

$$= \frac{12(3x+1)^3}{1} //$$

$$(2) y = \frac{1}{(4x+3)^2} = (4x+3)^{-2}$$

$$y' = -2 \cdot 4(4x+3)^{-3}$$

$$= \frac{-8}{(4x+3)^3} //$$

10

次の関数を微分せよ。

$$(1) y = (2x^2+5)^4$$

$$y' = (2x^2+5)' \cdot 4(2x^2+5)^3$$

$$= \frac{16x(2x^2+5)^3}{1} //$$

$$(2) y = (1-2x^2)^3$$

$$y' = (1-2x^2)' \cdot 3(1-2x^2)^2$$

$$= -4x \cdot 3(1-2x^2)^2$$

$$= \frac{-12x(1-2x^2)^2}{1} //$$

$$(3) y = \frac{1}{(x^2+1)^3} = (x^2+1)^{-3}$$

$$y' = (x^2+1)' \cdot -3(x^2+1)^{-4}$$

$$= \frac{-6x}{(x^2+1)^4} //$$

11

逆関数の微分法を用いて、次の関数を微分せよ。

$$(1) y = \sqrt[6]{x}$$

$$x = y^6$$

$$\frac{dx}{dy} = 6y^5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6y^5}$$

$$= \frac{1}{6^6 \sqrt{x^5}} //$$

$$(2) y = \sqrt[3]{x} \quad (x > 0)$$

$$x = y^3$$

$$\frac{dx}{dy} = 3y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2}$$

$$= \frac{1}{3^3 \sqrt{x^2}} //$$

12

次の関数を微分せよ。

$$(1) y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} //$$

$$(2) y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} //$$

$$(3) y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2x\sqrt{x}} //$$

13

次の関数を微分せよ。

$$(1) y = \sqrt[3]{(x+1)^2} = (x+1)^{\frac{2}{3}}$$

$$y' = \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}} //$$

$$(2) y = \sqrt{4-x^2} = (4-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}(4-x^2)'$$

$$= \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} //$$

14

次の関数を微分せよ。

$$(1) y = \cos 2x$$

$$y' = -2 \sin 2x$$

$$= -2 \sin 2x //$$

$$(2) y = \sqrt{2} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y' = 3\sqrt{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) //$$

$$(3) y = \sin^2 x$$

$$y' = (\sin x)' \cdot 2 \cos x$$

$$= 2 \sin x \cos x //$$

$$(4) y = \tan^2 x$$

$$y' = (\tan x)' \cdot 2 \tan x$$

$$= \frac{2 \tan x}{\cos^2 x} //$$

$$(5) y = \frac{1}{\sin x}$$

$$y' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} //$$

$$(6) y = \cos^2 3x$$

$$y' = 2 \cos 3x \cdot (-\sin 3x) \cdot 3$$

$$= -6 \sin 3x \cos 3x //$$

微分法③

15

次の関数を微分せよ。

(1) $y = x \sin x + \cos x$

$$y' = \sin x + x \cos x - \sin x$$

$$= x \cos x$$

(2) $y = x \cos x - \sin x$

$$y' = \cos x - x \sin x - \cos x$$

$$= -x \sin x$$

16

次の関数を微分せよ。

(1) $y = \log_3 x$

$$y' = \frac{(3x)'}{3x} = \frac{1}{x}$$

(2) $y = \log_2(4x-1)$

$$y' = \frac{4}{(4x-1) \log 2}$$

(3) $y = \log(x^2+1)$

$$y' = \frac{2x}{x^2+1}$$

(4) $y = x \log x - x$

$$y' = \log x + 1 - 1$$

$$= \log x$$

17

次の関数を微分せよ。

(1) $y = \log|3x+2|$

$$y' = \frac{3}{3x+2}$$

(2) $y = \log|\sin x|$

$$y' = \frac{\cos x}{\sin x}$$

(3) $y = \log_2|x^2-4|$

$$y' = \frac{2x}{(x^2-4) \log 2}$$

18

$\log|y|$ の導関数を利用して、次の関数を微分せよ。

(1) $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1}$

$$\log|y| = 2 \log|x| + \frac{1}{3} \log|x+1|$$

両辺を微分

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{3(x+1)}$$

$$= \frac{6(x+1) + x}{3x(x+1)}$$

$$= \frac{7x+6}{3x(x+1)}$$

$$y' = \frac{7x+6}{3x(x+1)} \cdot x^2 \sqrt[3]{x+1}$$

$$= \frac{x(7x+6)}{3 \sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

(2) $y = \frac{(x+2)(x+3)^3}{x^2+1}$

$$\log|y| = \log|x+2| + 3 \log|x+3| - \log|x^2+1|$$

両辺を微分

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x+3} - \frac{2x}{x^2+1}$$

$$= \frac{(x+3)(x^2+1) + 3(x+2)(x^2+1) - 2x(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x^2+1)}$$

$$= \frac{x^3+1+3x^2+3+3x^2+3x+6x^2+6-2x^3-10x^2-12x}{(x+2)(x+3)(x^2+1)}$$

$$= \frac{2x^3-x^2-8x+9}{(x+2)(x+3)(x^2+1)}$$

$$y' = \frac{2x^3-x^2-8x+9}{(x+2)(x+3)(x^2+1)} \cdot \frac{(x+2)(x+3)^3}{x^2+1}$$

$$= \frac{(x+3)^2(2x^3-x^2-8x+9)}{(x^2+1)^2}$$

(3) $y = x^{\sin x} \quad (x > 0)$

$$\log y = \sin x \log x$$

両辺を微分

$$\frac{y'}{y} = \cos x \log x + \frac{\sin x}{x}$$

$$y' = \left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x} \right) x^{\sin x}$$

19

次の関数を微分せよ。ただし、(6)の a は 1 でない正の定数とする。

(1) $y = e^{2x}$

$$y' = 2e^{2x}$$

(2) $y = e^{-x^2}$

$$y' = (-2x) e^{-x^2}$$

$$= -2x e^{-x^2}$$

(3) $y = 3^x$

$$y' = 3^x \log 3$$

(4) $y = 2^{-3x}$

$$y' = (-3x) 2^{-3x} \log 2$$

$$= -3 \cdot 2^{-3x} \log 2$$

(5) $y = xe^x$

$$y' = e^x + xe^x$$

$$= e^x(1+x)$$

(6) $y = (2x-1)a^x$

$$y' = 2a^x + (2x-1)a^x \log a$$

$$= a^x(2 + (2x-1) \log a)$$

20

次の関数を微分せよ。

(1) $y = \frac{1}{1 + \cos x}$

$$y' = -\frac{(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2}$$

(2) $y = (\log x)^2$

$$y' = (\log x)' \cdot 2 \log x$$

$$= \frac{2 \log x}{x}$$

(3) $y = \log \left| \frac{x+1}{x+2} \right|$

$$= \log |x+1| - \log |x+2|$$

$$y' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

(4) $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$

$$y' = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

(5) $y = \sin^2 x \cos 2x$

$$y' = (\sin x)' \cdot 2 \sin x \cos 2x + 2 \sin^2 x (-\sin 2x)$$

$$= 2 \sin x \cos x \cos 2x - 2 \sin^2 x \sin 2x$$

$$= 2 \sin 2x \cos 2x - 2 \sin^2 x \sin 2x$$

$$= \sin 2x (\cos 2x - 2 \sin^2 x)$$

$$= \sin 2x (1 - 2 \sin^2 x - 2 \sin^2 x)$$

$$= \sin 2x (1 - 4 \sin^2 x)$$

21 【第 n 次導関数】

次の関数について、第 3 次までの導関数を求めよ。ただし、(1) の a は 0 でない定数とする。

(1) $y = ax^3$

$$y' = 3ax^2$$

$$y'' = 6ax$$

$$y''' = 6a$$

(2) $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$$y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y'' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$y''' = -6x^{-4} = \frac{-6}{x^4}$$

(3) $y = \cos x$

$$y' = -\sin x$$

$$y'' = -\cos x$$

$$y''' = \sin x$$

(4) $y = \log x$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y''' = \frac{2}{x^3}$$

(5) $y = e^x$

$$y' = e^x$$

$$y'' = e^x$$

$$y''' = e^x$$

(6) $y = e^{-2x}$

$$y' = -2e^{-2x}$$

$$y'' = 4e^{-2x}$$

$$y''' = -8e^{-2x}$$

22

次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

(1) $y = x^n$ (n は正の整数)

$$y' = nx^{n-1}$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2}$$

$$y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$y^{(n)} = n(n-1)(n-2) \dots 1$$

$$\therefore y^{(n)} = n!$$

(2) $y = e^{2x}$

$$y' = 2e^{2x}$$

$$y'' = 2^2 e^{2x}$$

$$y''' = 2^3 e^{2x}$$

$$\therefore y^{(n)} = 2^n e^{2x}$$

23 【曲線の方程式と導関数】

次の方程式で定められる x の関数 y について、 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $x^2 + y^2 = 1$

両辺 x で微分

$$2x + \frac{dy}{dx} \cdot 2y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(2) $x^2 - y^2 = 1$

両辺 x で微分

$$2x - \frac{dy}{dx} \cdot 2y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

24

x の関数 y が、 t を媒介変数として、次の式で表されるとき、 $\frac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

(1) $x = 2t^2, y = 2t - 1$

$$\frac{dx}{dt} = 4t, \frac{dy}{dt} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{4t} = \frac{1}{2t}$$

(2) $x = \cos t, y = \sin t$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{\cos t}{\sin t}$$

25

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ であることを用いて、次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}^2$$

$$= e^2$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$

$$2n = t \text{ とおく。}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{e}$$

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

$$n = 2t \text{ とおく。}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = e^2$$